経済統計概論　4

確率

今日のコラム

- 先々週の「ザ・ホワイトハウス」より
  - （サム）あ，それと，労働統計局の発表した消費者物価指数（ＣＰＩ）が0.6%あがっている．55(?) 年以来の高い伸び率なんだ．
  - （ＣＪ）　それじゃ，（記者会見で）絶対訊かれるわね．
  - （サム）ああ．統計の取り方が実態を反映していないって答えればいいよ．ＣＰＩは昔からある製品の値段を重視して，新開発の製品の価格をほとんど反映しないんだ．
  - （ＣＪ）そうよね．だいたい，パソコンなんてものすごく値段が下がっているけど，昔はなかったからＣＰＩには全然反映されないのよね．
  - （サム）うん．それに，技術が進歩しているおかげで，同じ製品でも全然性能が違うから，比較できない．
  - （ＣＪ）じゃ，訊かれたらそう答えるわ．
- アメリカのＣＰＩの場合，価格調査される品目はほとんど変わっていない．パソコンの価格変化は全く反映されていない．日本では，5年ごとに品目が改訂されている．

The West Wingカルトクイズ

- 前記の会話は消費者物価指数がある方式によって作成されていることに遠因がある．その方式とは？
- 厳密にその方法を運用することの問題点はなにか？
- 問題点の回避について
  - http://www.stat.go.jp/data/cpi/8.htm
  - http://www.ssa.gov/history/reports/boskinrpt.html

0．確率（1）

- 事象　　出来事
- 事象（出来事）がおきる可能性の指標
  - 確実に起きるが1，起きないが0
  - 起きる可能性が確実に起きる場合の何%か？
- 様々な事象を表すためにA，Bなど大文字を使用
  - Aが起きる確率をP（A）で表す

0．確率（2）

- 積事象：どちらもが起きるという出来事　$A \cap B$
- 排反事象
  - AかBのどちらかしか起きないという関係
  - AとBが一緒に起きるということはない
- 和事象：どれかが起きるという出来事　$A \cup B$
  - これはAとBのどちらかしか起きないという意味ではない
  - もし，AとBが排反事象なら，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

0．確率（3）

- $P(A \cup B)$ の計算
  - AかBのどれかが起きる確率（ただし，両方起きてもよい）
  - $A \cup B$ の中身
    - $A \cap B^C$, $A^C \cap B$, $A \cap B$　（これらは排反事象）
    - $P(A \cup B) = P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B) + P(A \cap B)$
  - A，Bの中身
    - $A \cap B, A \cap B^c$　　$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$
    - $A \cap B, A^C \cap B$　　$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$

0. 確率 (4)

- $P(A \cup B) = P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B) + P(A \cap B)$ に

  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$ から得られた

  $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$ と

  $P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$ から得られた

  $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ とを代入
- ________________________________を得る.

0. 確率 (5)

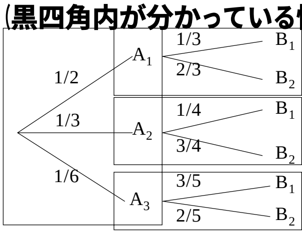
- 余事象
  - 「ある出来事が起きない」という出来事
  - Aの余事象 A^C で表す
  - $P(A^C) = 1 - P(A)$
    - Aと A^C は排反事象 (いずれかしか起こらない)

      $P(A^C \cup A) = P(A) + P(A^C)$
    - さらに, Aか A^C はどちらかが必ず起きる

      $P(A^C \cup A) = 1$
    - $P(A) + P(A^C) = 1$ 　　 $P(A^C) = 1 - P(A)$

1. 条件付き確率
1. 1 条件付き確率の概念 (1)

- 確率については高校レベルの知識を仮定
  - 本学の入試に出るレベル
- 2段構えの確率＝条件付き確率
  (黒四角内が分かっている情報)



$P(B_1|A_1) = 1/3$
$P(B_2|A_1) = 2/3$
$P(B_1|A_2) = 1/4$
$P(B_2|A_2) = 3/4$
$P(B_1|A_3) = 3/5$

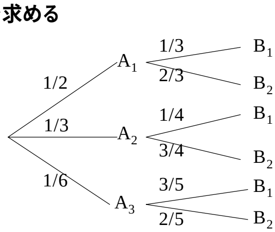
1. 1 条件付き確率の概念 (2)

- 同じ B_1 が起きる確率でも, A_1, A_2, A_3 のどれが起きたかによって確率が違ってくる.
  - 例
    - 得点圏打率
      - 野球における2塁, 3塁に走者がいる場合の打率で, その打者の勝負強さを示す指標. 普通, ランナーがいない場合の打率と違ってくる.
    - トランプ
      - すでに, A (エース) が出ている場合と, 出ていない場合で, Aが出る確率は違う (教科書p. 65例2. 9)
      - 確率系ゲーム＝トランプ, 麻雀などにおいてはこれを常に意識する必要がある.
    - 交通事故
      - 教科書p.67例2. 11やH社のPに乗っている人の事故率が異常に高いなどで, これがリスク細分型自動車保険の基礎になっている

1. 2 条件付き確率と同時確率

- 条件付き確率から同時確率を求める

	B_1	B_2
A_1	1/2×1/3 =1/6	1/2×2/3 =1/3
A_2	1/3×1/4 =1/12	1/3×3/4 =1/4
A_3	1/6×3/5 =1/10	1/6×2/5 =1/15

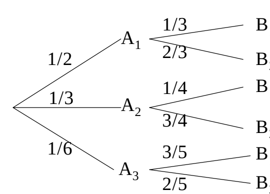


- $P(B_1$ かつ $A_1) = P(B_1 \cap A_1) = P(B_1 | A_1) \times P(A_1)$
- 一般的 : $P(X \cap Y) = P(X | Y) \times P(Y) = P(Y|X) \times P(X)$

1. 3 条件付き確率と普通の確率

- 条件付き確率から普通の確率を求める

	B_1	B_2
A_1	1/2×1/3 =1/6	1/2×2/3 =1/3
A_2	1/3×1/4 =1/12	1/3×3/4 =1/4
A_3	1/6×3/5 =1/10	1/6×2/5 =1/15
	$P(B_1)$= 1/6+1/12 +1/10=7/20	$P(B_2)$= 1/3+1/4+ 1/15=13/20



一般式

$$
\begin{aligned}
&P(B_1)\\
&= P(B_1 \cap A_1) + P(B_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_3)\\
&= P(B_1 \mid A_1)P(A_1) + P(B_1 \mid A_2)P(A_2) + P(B_1 \mid A_3)P(A_3)
\end{aligned}
$$

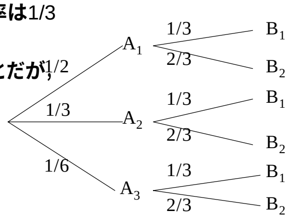
1．4　同時確率から条件確率へ

- 一般法則
  P(X| Y)=P(X∩Y)/P(Y)
  P(Y|X)=P(X∩Y)/P(X)
  理由：P(X∩Y)=P(X| Y)×P(Y)=P(Y|X)×P(X)
- 練習
  - 以下の結合確率の分割表から条件付き確率を求めてみよう

	B_1	B_2
A_1	1/4	1/5
A_2	1/6	1/7
A_3	1/8	97/840

2．独立
2．独立性の定義

- 独立
  - 右図の様な場合
  - A_1, A_2, A_3のどれがでようがB_1の起きる確率は1/3
  - 一般的には
    P(X|Y)=P(X)，同じことだが，
    P(X∩Y)
    =P(X|Y)×P(Y)
    = P(X)×P(Y)
    が成立するとき

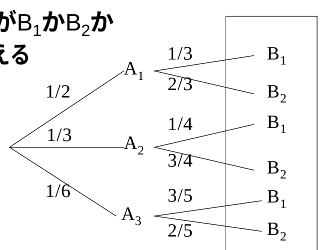


2．2　独立な例

- 得点圏打率の場合
  - 得点圏に走者がいようがいまいが同一の打率である＝バッティングマシーンのような精神的にタフな打者
- 太陽黒点と経済活動
  - 今やsunspot(太陽黒点) 均衡というものが経済学の概念ではあるが，たぶん太陽黒点と経済活動は関係ないであろう
  - パルサーB1957+20のX線放出量と経済活動
- 保険の場合
  - いくらリスク細分型保険でも飼っているペットの種類･有無で保険料を変えないだろう．それは，事故確率とこれが独立であるから

3．ベイズの定理
3．1　問題設定

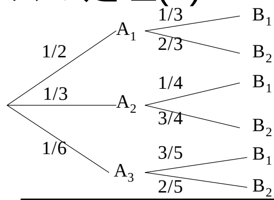
- $P(A_1|B_1)$，$P(A_1|B_2)$には意味があるだろうか？
  - 分かっている情報がB_1かB_2かしかない場合を考える
  - B_1が起きていると分かっていてA_1,A_2,A_3のどれが起きているかを確率的に推測する



3．2　現実の例

- 医療の例
  - 症状がBにあたり，Aが原因となる病因．医者は，様々な症状によって，確率の高いいくつかの病因に対する対処
- 経済学の例
  - 情報が隠されている場合のインセンティブの設計
    - 情報の経済学
- ビジネスの例
  - Bが注文した品目，Aが顧客の嗜好
    - 本の注文サイトアマゾンが利用しているらしい

3．3　ベイズの定理(1)



- **考え方**
  - **確率樹形図（ツリー）から分割表を作成**
  - **「同時確率から条件確率へ」の式を適用**
- **実例**
- $P(A_1|B_1)$
  $=P(A_1 \cap B_1)/P(B_1)$
  $=(1/6) \div (7/20)$
  $=10/21$

	B_1	B_2
A_1	1/6	1/3
A_2	1/12	1/4
A_3	1/10	1/15

$P(B_1)=7/20$　$P(B_2)=13/20$

3.3 ベイズの定理（2）

- **一般式**

$$P(A_i \mid B_k)$$
$$=\frac{P(A_i \cap B_k)}{P(B_k)}$$
$$=\frac{P(B_k \mid A_i)P(A_i)}{P(B_k \mid A_1)P(A_1)+P(B_k \mid A_2)P(A_2)+P(B_k \mid A_3)P(A_3)}$$