（統計解析論）

線形回帰における一歩進んだ仮説検定－Ｆ検定の利用法－

１．はじめに

経済学における実証分析には，しばしば線形回帰が用いられる．その中で特定の理論・性質を検証するために仮説検定が利用されている．しかし，一般的に使用されているのは，一つの係数に関する仮説検定を t 検定で行うくらいのものである．しかし，Ｆ検定を利用することによって，より経済理論に即した仮説検定を行うことができる．さらに，Ｆ検定の考え方は t 検定と密接に結びついており, t 検定の考えを少し一般化したにすぎないことから，その習得にはさしたる困難を伴わない．また，実際の推定に至っては極めて容易である．本講義で使用する教科書[1]では，Ｆ検定を他の教科書より詳しく扱い，その可用性を強調している．

したがって，本稿ではＦ検定の使用法を詳しく解説し，読者の実証分析に役立てたいと考えている．統計解析論を受講される方のみならず，卒業論文で統計データの解析を行う予定の方にも役立つことを期待している．

２．Ｆ検定の利用例（コブーダグラス型生産関数における規模に関する収穫一定の検証）

例えば，コブーダグラス型生産関数において規模に関する収穫一定が当てはまっているかを統計データに基づいて検証したいとする．この規模に関する収穫一定とは，様々な生産要素をみな同じ比率で増やしたときにその比率で生産量が増えるということである．

コブーダグラス型生産関数とは，Ｙ を（付加価値）生産量，Ｋ を資本ストック量，Ｌ を労働投入量とすると，$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ （A は定数）である．これらの変数は，実質化されている．ここで，両辺の自然対数を取って，$\log Y = \log A + \alpha \log K + \beta \log L$ と考えることもできる．もちろん，この関係は統計データでは厳密に当てはまることはまれである．従って，

$$\log Y = \log A + \alpha \log K + \beta \log L + \varepsilon$$

（ただしεは誤差または攪乱項で期待値は 0，分散は一定とする）と考える．なお，規模に関して収穫一定であるならば$\alpha + \beta = 1$である．さらに，$\alpha, \beta > 0$でなければならない．

統計データをこの式に当てはめることにしよう．統計データには，ある期間における各企業の資本ストック量，その期間内の労働投入量＝総労働時間，付加価値で計った生産量が記録されているか，または，ある経済単位（国，地方，企業等）の上記のデータが時系列で与えられることがある．もし，国や地方単位の場合は，付加価値で計った生産量は，実質国民総生産や県民総生産などである．

まず思いつくのは線形回帰モデルで推定することである．N 個のデータがあるとし，定数αを$\alpha = \log A$と定義すると，

$$\log Y_i = \gamma + \alpha \log K_i + \beta \log L_i + \varepsilon_i$$

が回帰式である．ここで，$(Y_i, K_{i.}, L_i)$は i 番目の一対のデータを示す．また，ε_iは i 番目の生産量データの確率的変動（攪乱項）であり，実際には統計データには現れていないが，その存在を想定するのである．このε_iの変動は，期待値が０で分散は一定の値σ^2であると想定しよう．

Excel を使って具体的な推定を行ってみる．データは，アメリカのある州の非鉄金属企業のある期のデータである[1]．まず，Ｙ，Ｋ，Ｌのデータをワークシートの各列に入力する．（図１）．それぞれのデータの自然対数を取ることにしよう．図２のように$Log(Y_1)$を入力したいセルに「=LN(B2)」を入力する．ここで,「LN」は自然対数,「B2」はY_1のデータがあるセルを示している．図３は,「=LN(A2)」と入力されたセルの周りを

[1] [2]付属 CD-ROM 所収 Table A7.1 を使用. データの由来に関しては[2]p.283 の脚注を参照のこと.

拡大したものである．この右下に注目すると小さい四角（■）があることに気づく．これを，横に引っ張って（図４），次に下に引っ張る（図５）．これで，該当のセルに妥当なデータを入力できた．Excel のこの機能はオートフィルと呼ばれている．次に，メニューバーの「ツール」－「分析ツール」を選ぶ[2]．（図６）するとデータ分析のメニューウインドウが現れる（図７）．スクロールバーで下の方にいくと「回帰分析」という項目があらわれるので選択する（図８）．すると，回帰分析の入力ボックスがでるが，それに図９のように入力を与える．ここで，「入力Ｙ範囲」には回帰の被説明変数のセルの範囲を指定する．第１行の「Log Y」という変数の説明を含んで指定すると都合がよい．キーボードから直接入力ボックスにデータの範囲を指定してもよいが，入力ボックスにカーソルを持っていって左クリックしそのあと，Log Y のデータのある範囲をドラッグしてもよい.「入力X範囲」には説明変数のデータの範囲を指定する．ここでも，第１行のデータの説明を含めてある．データの説明の行をデータ範囲に指定したので「ラベル」にはチェックをいれておく．そして,「OK」を押すと図 10 のように結果が出力される（教科書 102~104 ページ参照）.

この結果を教科書[1]のスタイルに書き直すと,

変数名	推定値	標準偏差	t値
定数項	1.17	0.33	3.58
Log L	0.60	0.13	4.79
Log K	0.38	0.09	4.40

$\hat{\alpha}=0.38$，$\hat{\beta}=0.60$，$\hat{\gamma}=1.17$，$R^2=0.94$，修正 $R^2=0.94$，$S^2=0.035$，$S=0.19$，$ESS=14.21$，$RSS=0.85$，$TSS=15.06$ となる.

この結果を少し検討してみよう．$\alpha,\beta>0$ であるから，まず，帰無仮説 $\alpha=0$，対立仮説 $\alpha>0$ を検定してみよう．この帰無仮説に対する t 値は結果のワークシートに与えられていて 4.40 である．5%の上方片側検定を行うと，臨界値は 1.71 であるから，帰無仮説 $\alpha=0$ は棄却されて，対立仮説 $\alpha>0$ が採択される[3]．また, 帰無仮説を $\alpha\geq 0$, 対立仮説を $\alpha<0$ ととると，下方片側検定になるが，t 統計量は正であるから，帰無仮説を棄却できず，$\alpha\geq 0$ が採択される．同様に，帰無仮説 $\beta\leq 0$，対立仮説 $\beta>0$ においても $\beta>0$ が採択され，帰無仮説 $\beta\geq 0$ に対してはそれを棄却することができない．従って，係数の符号が理論と異なるということはないので，ある程度まともな推定といえる.

ここで，実際に規模に関する収穫一定，すなわち，$\alpha+\beta=1$ が成り立っているかを検証してみよう．まず，推定値の $\alpha+\beta$，すなわち，$\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ を計算すると，0.98 となっている．この結果からは，規模に関する収穫一定が成立しそうに見える．しかし，$\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ はあくまでも推定値であるからその誤差がどの程度か分からなければ，判断（＝検定）はできない．実際, $Var(\hat{\alpha}+\hat{\beta})=Var(\hat{\alpha})+Var(\hat{\beta})+2Cov(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ であるが，Excel の出力をみると

$$Var(\hat{\alpha})=0.09^2=0.007,$$

$$Var(\hat{\beta})=0.13^2=0.015$$

となり分かるが，$Cov(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ は出力されていない[4]．したがって，$Var(\hat{\alpha}+\hat{\beta})$ を評価するのは Excel を使用する限り難しい.

ではどうするかというと，教科書に書かれているＦ検定を使用するのである．まず，検証したい仮説（この場合 $\alpha+\beta=1$），すなわち，帰無仮説を仮定しない回帰モデル（対立モデル）を推定し，その RSS を計算

[2] もし,「分析ツール」が現れなければ,「∨」が二つ重なっているところをクリックしてみよう. それでも現れなければ,「アドイン」を選択し「分析ツール」にチェックを入れ「OK」を押し，再度メニューバーの「ツール」－「分析ツール」を選択しよう.

[3] 実際にはこれは，帰無仮説を $\alpha\leq 0$，すなわち，理論上あり得ないこととしているのと同等であり，それが棄却されるのである,

[4] 他の統計ソフトでは出力されるが, Excel では出力されない.

する．この値をRSS_aとする．次に，帰無仮説に従った回帰モデル（帰無モデル）を推定して，そのRSSを計算する．これをRSS_0とする．そして，$F=\frac{(RSS_0-RSS_a)/r}{RSS_a/(n-h)}$を計算するのである．ここで，ｎはデータ数，ｈは対立モデルで推定したパラメータの個数，ｒは帰無仮説の方程式の本数である[5]．もし回帰の攪乱項ε_iが独立で分散が一定の正規分布に十分に近ければ，Ｆの値の確率分布は分子自由度r，分母自由度$n-h$のカイ二乗分布で近似できる.

収穫一定の検証の例で具体的にやってみよう．対立モデルは,

$$\log Y_i=\gamma+\alpha\log K_i+\beta\log L_i+\varepsilon_i$$

である．この推定はすでに行ったが，$RSS_a=0.85$であった．次に，帰無モデルを考えよう．$\alpha+\beta=1$を$\beta=1-\alpha$と変形して対立モデルに代入すると,

$$\begin{aligned}\log Y_i&=\gamma+\alpha\log K_i+(1-\alpha)\log L_i+\varepsilon_i\\&=+\gamma+\log L_i+\alpha(\log K_i-\log L_i)+\varepsilon_i\end{aligned}$$

が得られる．ここで，右辺の$\log L_i$は係数の決まっている変数であるので，教科書（変数間の和差操作p.28）にあるとおり，左辺に移項して，被説明変数としても問題はない．したがって,

$$\log Y_i-\log L_i=\gamma+\alpha(\log K_i-\log L_i)+\varepsilon_i$$ が

帰無仮説における回帰式である.

実際に分析ツールの回帰分析を用いて推定してみよう．まず，新たな被説明変数と変数をワークシートに入力しよう．まず，変数の説明として，log Ｋの右のセルとその次のセルに，「$\log Y-\log L$」と「$\log K-\log L$」と書き込もう．この順序はどうでもよいが，回帰式の左辺が左に来るようにしている．そして，「$\log Y-\log L$」の下のセルに，「=LN(A2)－LN(C2)」と入力しよう（図１１）．その右のセルには，「=LN(C2)－LN(B2)」と入力する（図１２）．その後，オートフィルを利用するために，この二つの数式を入力したセルをドラッグしよう（図１３）．右下に小さな■があるので，それを下まで引っ張っていき，マウスの左ボタンをはなす（図１４）．すると帰無モデルの説明変数，被説明変数の入力が完了する．あとは，対立モデルを推定したのと同じである．その結果は，図１５のようになるであろう．ここから，$RSS_0=0.86$とわかる[6]．いよいよＦ統計量の計算だ．帰無モデルの結果が入っているシート上に計算する．適当なセルに「=C13-」といれた（図１６）後，左下のワークシートを選択するタブを右クリックしていく．すぐに，対立モデルの推定結果が入っているワークシートを見つけることができる．その中の残差変動(RSS)を示すセルを右クリックする（図１７）．その後は，数式入力エリア内に図１８の様に数式を入れる．これは，Ｆ統計量の式

$$\begin{aligned}F&=\frac{(RSS_0-RSS_a)/r}{RSS_a/(n-h)}\\&=\frac{(RSS_0-RSS_a)/1}{RSS_a/(27-3)}\end{aligned}$$

を入力したものである．そして，Enter キーを押すと，図１９が得られる．Ｆ統計量の値は0.11である．次は検定だ．検定のためには分子自由度１，分母自由度24のＦ分布の有意水準αに対応した臨界値（境界値）を知る必要がある．そのためには，EXCEL の FINV 関数を利用しよう．該当するセルに「=FINV(α,0.05,1,24)」（この例では有意水準を 5%にとるので「=FINV(0.05,1,24)」）と入力し（図２０），Enter キーを押そう．図２１のように臨界値は，4.26であるので，統計量は臨界値を下回っている．したがって，帰無仮説は棄却できず，規模に関する収穫一定が妥当性を持つことが示された．ここで，棄却域の取り方だが，もし帰無モデルが正しければ，統計量は０

[5] 本質的に異なる方程式の本数を数える．例えば，$r=1$と$r^2=1$は同じとみなされる.

[6] ここで$RSS_0>RSS_a$でなければならない．計算間違いのチェックポイントだ.

に近づくはずだから，棄却域は値の大きい側にだけ取られる（片側検定）ので，「=FINV($\alpha/2$,0.05,1,24)」（両側検定用臨界値）ではないのである．

２． 検証したい仮説が一つの場合

上記の例を一般化してみよう．回帰式を

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_K x_{iK} + \varepsilon_i$$

とする．ここで，$x_{0i} = 1$ とおいて，回帰式を

$$y_i = \beta_0 x_{0i} + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_K x_{iK} + \varepsilon_i$$

と書き直す．さらに，検証したい仮説（帰無仮説）が係数「$(\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_K)$ の一次式=定数」の形で表されるとする．すなわち，$\alpha_0\beta_0 + \cdots + \alpha_K\beta_K = c$ が帰無仮説であるとする．例としては，先ほどの $\alpha + \beta = 1$ の他に，二つの係数が等しいという $\alpha = \beta$（すなわち $\alpha - \beta = 0$）などが考えられる．$\alpha_0, \cdots, \alpha_K$ の中に 0 でないものが少なくとも一つはあるはずであるから，それを α_p とする．すると，帰無仮説は，

$$\beta_p = c - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^{N} \frac{\alpha_j}{\alpha_p} \beta_j$$

と書き直すことができる．これを元の回帰式に代入すると，

$$\begin{aligned} y_i &= \left(c - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^{N} \frac{\alpha_j}{\alpha_p} \beta_j \right) x_{ip} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^{N} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \\ &= c x_{ip} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^{N} \beta_j \left(x_{ij} - \frac{\alpha_j}{\alpha_p} x_{ip} \right) + \varepsilon_i \end{aligned}$$

となり，教科書（変数間の和差操作 p.28）にあるとおり，$c x_{ip}$ を左辺に移項して

$$y_i - c x_{ip} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^{N} \beta_j \left(x_{ij} - \frac{\alpha_j}{\alpha_p} x_{ip} \right) + \varepsilon_i$$

が帰無モデルとなる．この回帰モデルの RSS を RSS_0 として，

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_K x_{iK} + \varepsilon_i$$

の RSS を RSS_a として

$$F = \frac{(RSS_0 - RSS_a)/1}{RSS_a/(n-K-1)}$$

を求めて検定を行う．この分布は，近似的に $F(1, n-K-1)$ に従う．

注意点は，回帰モデルの右辺，つまり，説明変数に定数項がない場合である．このときは，回帰係数の推定の際の図９の指定において，「定数に０を使用」をチェックしておく．あとは同じである．

３． 検証したい仮説が二つ以上の場合

検証したい仮説（帰無仮説）が複数（ｒ本）の「$(\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_K)$ の一次式=定数」の式で表されるとする．つまり，

$$\begin{cases} \alpha_{10}\beta_0 + \cdots + \alpha_{1K}\beta_K = c_1 \\ \qquad \vdots \\ \alpha_{r0}\beta_0 + \cdots + \alpha_{rK}\beta_K = c_r \end{cases}$$

と表されるような場合である．なお，このｒ本の方程式の係数行列

$$\begin{pmatrix} a_{10} & \cdots & a_{1K} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rK} \end{pmatrix}$$

はｒ個の独立な行ベクトルを持っているとする．これは，仮説の式の本数が本質的にｒ本以下に減らないことを示している．この場合，この連立方程式は β_i の中からｒ個（$\beta_{m_1}, \cdots, \beta_{m_r}$ とする）適当に選べば，

$$\begin{cases} \beta_{m_1} = \mu_1 + \displaystyle\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m_1, \cdots, m_r}}^{K} \lambda_{1j} \beta_j \\ \qquad \vdots \\ \beta_{m_r} = \mu_r + \displaystyle\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m_1, \cdots, m_r}}^{K} \lambda_{rj} \beta_j \end{cases}$$

と解くことができる．これらを回帰式に代入して，

$$y_i = \sum_{k=1}^{r}\left(\mu_k + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq m_1,\cdots,m_r}}^{K}\lambda_{kj}\beta_j\right)x_{i\,m_k} + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq m_1,\cdots,m_r}}^{K}\beta_j x_{ij} + \varepsilon_i$$

$$= \sum_{k=1}^{r}\mu_k x_{i\,m_k} + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq m_1,\cdots,m_r}}^{K}\beta_j\left(x_{ij} + \sum_{k=1}^{r}\lambda_{kj}x_{m_k}\right) + \varepsilon_i$$

を得る．従って，教科書（変数間の和差操作 p.28）にあるとおり，$\sum_{k=1}^{r}\mu_k x_{m_k}$ を左辺に移項して

$$y_i - \sum_{k=1}^{r}\mu_k x_{m_k} = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq m_1,\cdots,m_r}}^{K}\beta_j\left(x_{ij} + \sum_{k=1}^{r}\lambda_{kj}x_{i\,m_k}\right) + \varepsilon_i$$

が帰無仮説下での回帰モデルとなる．統計量は,

$$F = \frac{(RSS_0 - RSS_a)/r}{RSS_a/(n-K-1)}$$

を求めて検定を行う．この分布は，近似的に $F(r, n-K-1)$ に従う.

このような複数の方程式からなる仮説を複合仮説と呼ぶ．このような例として，トランスログ生産関数における収穫一定性の仮説の検定を説明しよう．トランスログ生産関数は，コブーダグラス型生産関数を一般化したもので,

$$\log Y = \gamma + \alpha\log K + \beta\log L + \delta_{KK}(\log K)^2 + \delta_{LK}(\log K)(\log L) + \delta_{LL}(\log L)^2$$

となっている．これを対立仮説下での回帰モデルにすると,

$$\log Y = \gamma + \alpha\log K + \beta\log L + \delta_{KK}(\log K)^2 + \delta_{LK}(\log K)(\log L) + \delta_{LL}(\log L)^2 + \varepsilon_t$$

となるが，ここで帰無仮説は,

$$\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ \delta_{KK}=0 \\ \delta_{LK}=0 \\ \delta_{LL}=0 \end{cases}$$

となる．帰無仮説における回帰モデルは２節の例と同じである．対立仮説での回帰を行った結果が図２２であるが，$RSS_a = 0.68$ である．その結果,

$$F = \frac{(RSS_0 - RSS_a)/4}{RSS_a/(27-6)} = 1.36$$

となり，この分布 $F(4,26)$ から求めた臨界値 2.84 より小さいので，対立仮説をトランスログ関数として，それと比較しても，規模に関する収穫一定が妥当性を持つことになる.

４．不等式制約の場合（片側Ｆ検定＝両側ｔ検定）

最初の例で帰無仮説を $\alpha \le 0$ を検定した．その際，片側ｔ検定を使用した．では，帰無仮説 $\alpha_0\beta_0 + \cdots + \alpha_K\beta_K \le c$ を検定できないだろうか.結論は「できる」である．帰無モデルとして，$\alpha_0\beta_0 + \cdots + \alpha_K\beta_K = c$ とした場合の回帰モデルをとるのは今までと同様である.

それは教科書[1]p.96 にかかれている仮説が１つの場合のｔ検定とＦ検定の関係 $F = t^2$ からわかる.（ここで，$t = \dfrac{\alpha_0\hat\beta_0 + \cdots + \alpha_K\hat\beta_K - c}{\alpha_0\hat\beta_0 + \cdots + \alpha_K\hat\beta_K\text{の標準誤差}}$ である.）片側Ｆ検定は両側ｔ検定と同じなのである．片側Ｆ検定は，有意水準が s の場合 $F > \eta$ で棄却される．ここで，η は $\Pr(F \ge \eta) = s$ を満たすように設定される．ところが，$F = t^2$ から $\Pr(t^2 \ge \eta) = s$ なので，$\Pr(t \ge \sqrt{\eta}\text{または}t \le -\sqrt{\eta}) = s$ で臨界値（境界値）が設定されることになる．棄却域も $F = t^2 > \eta$ から $t > \sqrt{\eta}\text{または}t < -\sqrt{\eta}$ となる．これは，有意水準ｓの両側ｔ検定である.

ここで，$\alpha_0\beta_0 + \cdots + \alpha_K\beta_K > c$ でかつ $F > \xi$（ただし $\Pr(F \ge \xi) = q$）で棄却するような検定を考えてみよう．$\alpha_0\beta_0 + \cdots + \alpha_K\beta_K > c$ から，

$$t = \frac{\alpha_0\hat\beta_0 + \cdots + \alpha_K\hat\beta_K - c}{\alpha_0\hat\beta_0 + \cdots + \alpha_K\hat\beta_K\text{の標準誤差}} > 0 \text{ である.}$$

したがって，$t > \sqrt{\xi}$ で棄却している片側検定である．では，臨界値（境界値）の設定はどうなっているのだ

ろうか， $\Pr(F \geq \xi) = q$ より， $\Pr\left(t \geq \sqrt{\xi}\text{または}t \leq -\sqrt{\xi}\right) = q$ であるが，t 分布は対称分布なので， $\Pr\left(t \leq -\sqrt{\xi}\right) = \Pr\left(t \geq \sqrt{\xi}\right)$ であるから，

$$\begin{aligned}\Pr(F \geq \xi) &= \Pr\left(t \geq \sqrt{\xi}\text{または}t \leq -\sqrt{\xi}\right) \\ &= \Pr\left(t \geq \sqrt{\xi}\right) + \Pr\left(t \leq -\sqrt{\xi}\right) \\ &= 2\Pr\left(t \geq \sqrt{\xi}\right) = q\end{aligned}$$

となる．となり， $\Pr\left(t \geq \sqrt{\xi}\right) = q/2$ となる．つまり，有意水準を s にとれば， $\Pr\left(t \geq \sqrt{\xi}\right) = q/2 = s$ である．したがって，臨界値（境界値） ξ は， $\Pr(F \geq \xi) = q = 2s$ でとることによって片側検定ができるのである．

帰無仮説 $\alpha_0\beta_0 + \cdots + \alpha_K\beta_K \leq c$ の場合は，棄却域を $\alpha_0\beta_0 + \cdots + \alpha_K\beta_K > c$ ととればいいだけで，臨界値（境界値）の設定は同じである．

では，複数の仮説の中に不等式の仮説が存在した場合はどうだろうか？結論から言うと，多次元ｔ分布を活用することになるが，学部生レベルの知識を超えている．

5．その他の場合

ここまでは，「$(\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_K)$ の一次式=定数」の形の仮説，つまり，線形仮説のみを扱ってきた．しかし，仮説の中には，線形の形に書けないものもある．仮説を一般的に

$$\begin{cases} f_1(\beta_0, \cdots, \beta_K) = c_1 \\ \quad\vdots \\ f_r(\beta_0, \cdots, \beta_K) = c_r \end{cases}$$

としよう．もし，これが

$$\begin{cases} \beta_{m_1} = g_1\left(\beta_{m_1}, \cdots, \beta_{m_r}\text{以外の}\beta\right) + u_1 \\ \quad\vdots \\ \beta_{m_r} = g_r\left(\beta_{m_1}, \cdots, \beta_{m_r}\text{以外の}\beta\right) + u_r \end{cases}$$

と解けるならばこれを対立モデルに代入し，

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{k=1}^{r}\left(u_k + g_k\left(\beta_{m_1}, \cdots, \beta_{m_r}\text{以外の}\beta\right)\right)x_{i\,m_k} \\ &\quad + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m_1, \cdots, m_r}}^{K} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \\ &= \sum_{k=1}^{r} u_k x_{i\,m_k} \\ &\quad + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m_1, \cdots, m_r}}^{K} \left\{g_k\left(\beta_{m_1}, \cdots, \beta_{m_r}\text{以外の}\beta\right) + \beta_j\right\}x_{ij} \\ &\quad + \varepsilon_i \end{aligned}$$

帰無の回帰モデルができる．この推定が可能ならば，

$$F = \frac{(RSS_0 - RSS_a)/r}{RSS_a/(n-K-1)}$$

で同様に検定することができる．しかし，この帰無の回帰モデルは一般的に非線形回帰であるので，非線形推定の方法が必要になる．これは，大学院レベルでの標準的な方法なのでここでは触れない．

6．まとめ

本稿では，通常線形回帰分析で使用されているｔ検定より一歩進んで，一つ，または，複数の一次式からなる仮説の検定をＦ検定によって行う方法を示した．

この方法は，Excel の分析ツールの一つである回帰分析パッケージの標準的な機能のみで実現できるので，原理さえ理解すれば容易に使用できる．さらにいえば，一般論を理解できなくても，第２節の実例のところをまねればうまくいくはずである．

卒論，レポートなどでデータ解析をする場合の一助となれば幸いである．

参考文献

[1] 森棟公夫 (1999)『計量経済学』東洋経済新報社

[2] Greene (2000) “Econometric Analysis (4th. Ed.),” Prentice Hall.

[3] 縄田和満 (1996) 『Excel による回帰分析入門』朝倉書店

	A	B	C
1	Y	L	K
2	657.29	162.31	279.99
3	935.93	214.43	542.5
4	1110.65	186.44	721.51
5	1200.89	245.83	1167.68
6	1052.68	211.4	811.77
7	3406.02	690.61	4558.02
8	2427.89	452.79	3069.91
9	4257.46	714.2	5585.01
10	1625.19	320.54	1618.75
11	1272.05	253.17	1562.08
12	1004.45	236.44	662.04
13	598.87	140.73	875.37
14	853.1	145.04	1696.98
15	1165.63	240.27	1078.79
16	1917.55	536.73	2109.34
17	9849.17	1564.83	13989.55
18	1088.27	214.62	884.24
19	8095.63	1083.1	9119.7
20	3175.39	521.74	5686.99
21	1653.38	304.85	1701.06
22	5159.31	835.69	5206.36
23	3378.4	284	3288.72
24	592.85	150.77	357.32
25	1601.98	259.91	2031.93
26	2065.85	497.6	2492.98
27	2293.87	275.2	1711.74
28	745.67	137	768.59

図1

	A	B	C	D	E	F
1	Y	L	K	Log Y	Log L	Log K
2	657.29	162.31	279.99	6.488125		
3	935.93	214.43	542.5			
4	1110.65	186.44	721.51			
5	1200.89	245.83	1167.68			
6	1052.68	211.4	811.77			
7	3406.02	690.61	4558.02			
8	2427.89	452.79	3069.91			
9	4257.46	714.2	5585.01			
10	1625.19	320.54	1618.75			
11	1272.05	253.17	1562.08			
12	1004.45	236.44	662.04			
13	598.87	140.73	875.37			
14	853.1	145.04	1696.98			
15	1165.63	240.27	1078.79			
16	1917.55	536.73	2109.34			
17	9849.17	1564.83	13989.55			
18	1088.27	214.62	884.24			
19	8095.63	1083.1	9119.7			
20	3175.39	521.74	5686.99			
21	1653.38	304.85	1701.06			
22	5159.31	835.69	5206.36			
23	3378.4	284	3288.72			
24	592.85	150.77	357.32			
25	1601.98	259.91	2031.93			
26	2065.85	497.6	2492.98			
27	2293.87	275.2	1711.74			
28	745.67	137	768.59			

図2

図3

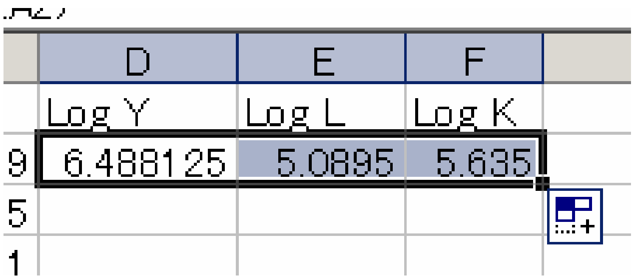

図4

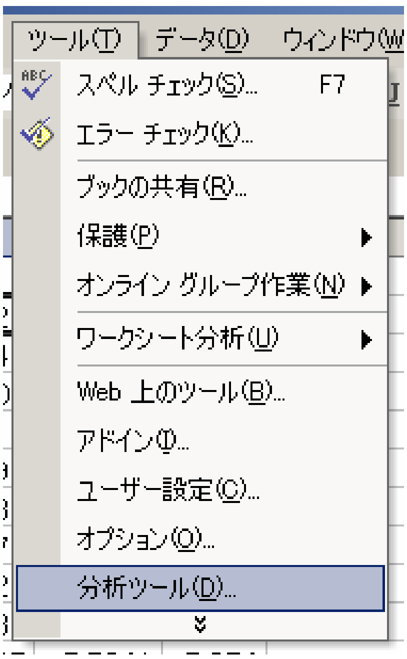

図6

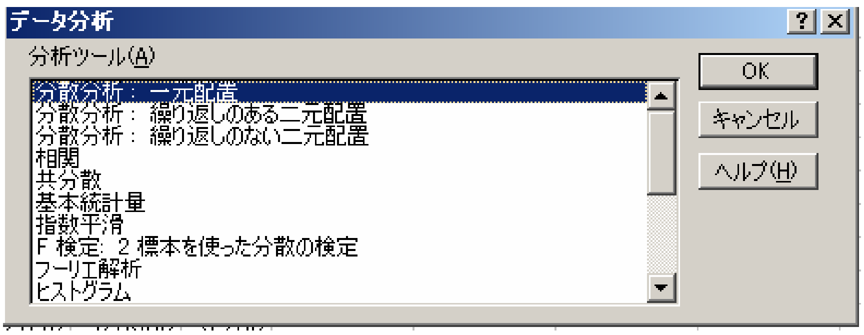

図7

D	E	F
Log Y	Log L	Log K
6.488125	5.0895	5.635
6.841541	5.368	6.296
7.012701	5.2281	6.581
7.090818	5.5046	7.063
6.959095	5.3538	6.699
8.1333	6.5376	8.425
7.794778	6.1154	8.029
8.356428	6.5712	8.628
7.39338	5.77	7.389
7.148385	5.5341	7.354
6.912195	5.4657	6.495
6.395045	4.9468	6.775
6.748877	4.977	7.437
7.061017	5.4818	6.984
7.558804	6.2855	7.654
9.195142	7.3555	9.546
6.992345	5.3689	6.785
8.99908	6.9876	9.118
8.063186	6.2572	8.646
7.410577	5.7198	7.439
8.548558	6.7283	8.558
8.125158	5.649	8.098
6.384941	5.0158	5.879
7.378996	5.5603	7.617
7.633297	6.2098	7.821
7.737996	5.6175	7.445
6.614283	4.92	6.645

図５

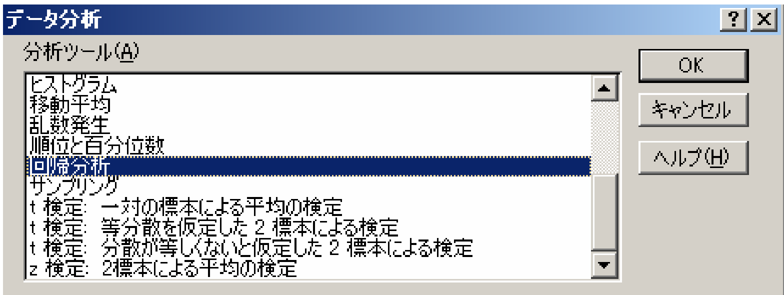

図８

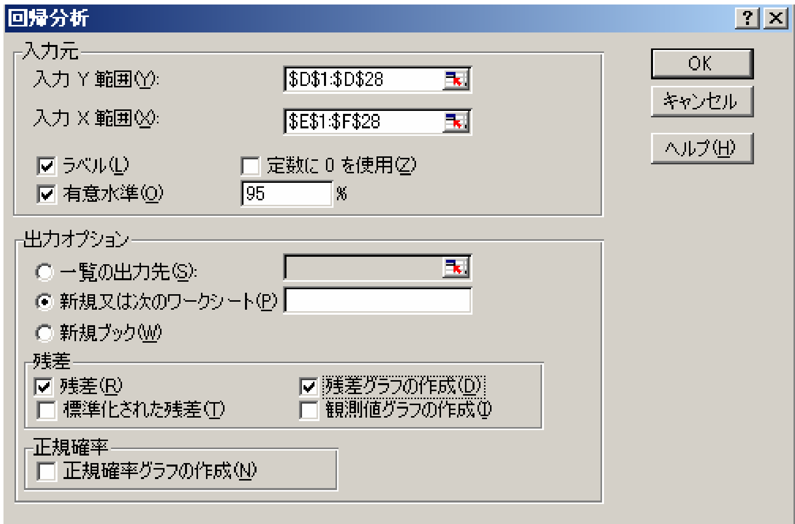

図９

概要

回帰統計	
重相関 R	0.97132
重決定 R2	0.943463
補正 R2	0.938751
標準誤差	0.188374
観測数	27

分散分析表

	自由度	変動	分散
回帰	2	14.21156	7.105781
残差	24	0.851634	0.035485
合計	26	15.0632	

	係数	標準誤差	t
切片	1.170644	0.326782	3.582339
Log L	0.602999	0.125954	4.787457
Log K	0.37571	0.085346	4.402204

図１０

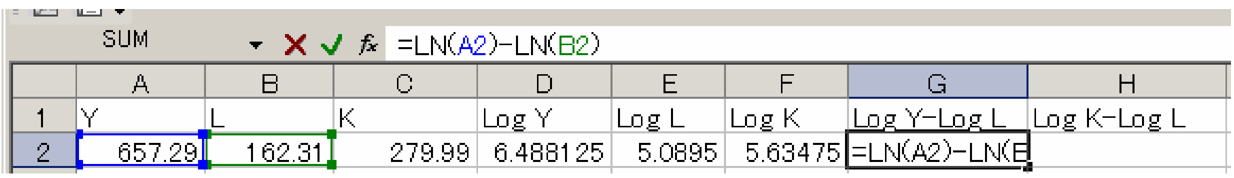

図１１

SUM =LN(C2)-LN(B2)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Y	L	K	Log Y	Log L	Log K	Log Y-Log L	Log K-Log L
2	657.29	162.31	279.99	6.488125	5.0895	5.63475	1.398617234	=LN(C2)-LN(B2)

図１２

G	H
Log Y-Log L	Log K-Log L
1.398617234	0.545245801

図１３

	A	B	C	D	E	F
1	概要					
2						
3	回帰統計					
4	重相関 R	0.693597				
5	重決定 R2	0.481076				
6	補正 R2	0.460319				
7	標準誤差	0.185013				
8	観測数	27				
9						
10	分散分析表					
11		自由度	変動	分散	刂された分散	有意 F
12	回帰	1	0.793328	0.793328	23.17663	6.03E-05
13	残差	25	0.855741	0.03423		
14	合計	26	1.649069			
15						
16		係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%
17	切片	1.069265	0.131759	8.115322	1.81E-08	0.797903
18	Log K-Log	0.36303	0.075408	4.814211	6.03E-05	0.207724
19						

図１５

G	H
Log Y-Log L	Log K-Log L
1.398617234	0.545245801
1.473557343	0.928204741
1.784591237	1.353236767
1.586177987	1.558133913
1.605342499	1.345464975
1.595724468	1.887068333
1.679349405	1.913975082
1.785264982	2.056678467
1.623372937	1.619402452
1.614323851	1.819712346
1.446500931	1.029631501
1.448201385	1.827803493
1.771867207	2.459595913
1.579253701	1.501832031
1.273308434	1.368635207
1.839609996	2.19053343
1.623475536	1.415859497
2.01149711	2.130609609
1.806016359	2.388767009
1.690757104	1.719187013
1.820300398	1.829378503
2.476183265	2.449279472
1.369185919	0.862876242
1.818660226	2.056405942
1.423500502	1.61143752
2.12049752	1.82776757
1.694302217	1.724576742

図１４

SUM =(C13-

	A	B	C	D	
1	概要				
2					
3	回帰統計			F検定	
4	重相関 R	0.693597		=(C13-	
5	重決定 R2	0.481076			
6	補正 R2	0.460319			
7	標準誤差	0.185013			
8	観測数	27			
9					
10	分散分析表				
11		自由度	変動	分散	刂さ
12	回帰	1	0.793328	0.793328	2
13	残差	25	0.855741	0.03423	
14	合計	26	1.649069		
15					
16		係数	標準誤差	t	
17	切片	1.069265	0.131759	8.115322	1
18	Log K-Log	0.36303	0.075408	4.814211	6
19					
20					
21					

Sheet2 / Sheet4 / Sheet3 / Sheet5 / Sheet1 / TE

図１６

SUM =(C13-Sheet3!C13

	A	B	C	D	
1	概要				
2					
3	回帰統計				
4	重相関 R	0.97132			
5	重決定 R2	0.943463			
6	補正 R2	0.938751			
7	標準誤差	0.188374			
8	観測数	27			
9					
10	分散分析表				
11		自由度	変動	分散	観測
12	回帰	2	14.21156	7.105781	
13	残差	24	0.851634	0.035485	
14	合計	26	15.0632		
15					
16		係数	標準誤差	t	
17	切片	1.170644	0.326782	3.582339	
18	Log L	0.602999	0.125954	4.787457	
19	Log K	0.37571	0.085346	4.402204	
20					
21					

Sheet2 / Sheet4 / Sheet3 / Sheet5 / Sheet1 / TBL7

図１７

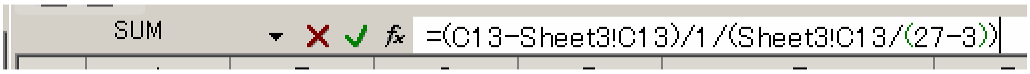

図１８

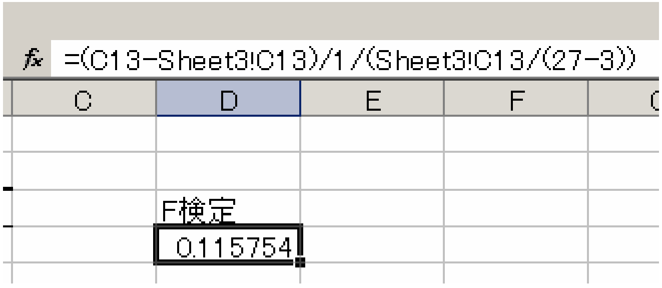

図１９

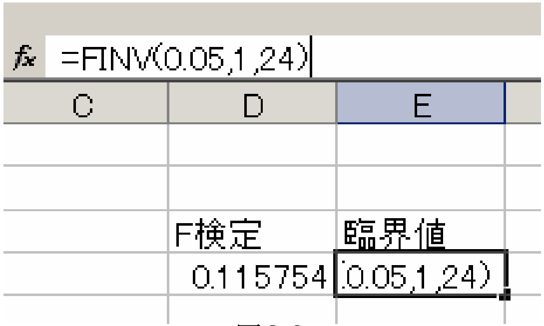

図２０

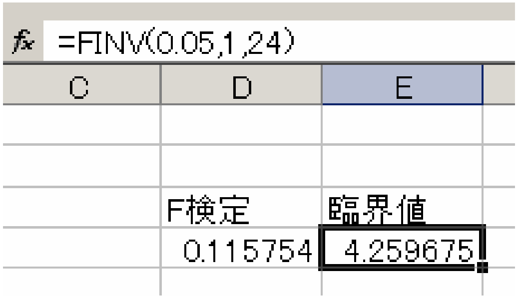

図２１

A	B	C	D	E	F
概要					
			F検定	臨界値	
回帰統計			1.357532	2.840096	
重相関 R	0.97717				
重決定 R2	0.954862				
補正 R2	0.944114				
標準誤差	0.179937				
観測数	27				
分散分析表					
	自由度	変動	分散	測された分散	有意 F
回帰	5	14.38327	2.876654	88.84734	2.12E-13
残差	21	0.679927	0.032377		
合計	26	15.0632			
	係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%
切片	0.944197	2.910754	0.324382	0.748858	-5.10905
Log L	3.613639	1.548073	2.334282	0.029593	0.394245
Log K	-1.89311	1.016261	-1.86282	0.076536	-4.00654
Log L^2	-0.48203	0.353692	-1.36284	0.18737	-1.21757
Log L log K	0.312387	0.438927	0.711706	0.484479	-0.60041
Log K^2	0.042647	0.146304	0.291497	0.773531	-0.26161

図２２