最小二乗推定量の統計的性質
◇前提：
　○データの分布の仮定
　　（Data Generating Process: DGP）

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

ε_i：攪乱項，誤差項

注意：残差項：$\hat{u}_i = y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i$ と区別すること

α, β は真の値を示す

回帰式：$y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i + \hat{u}_i$ と形が一致している
→特定化の誤りなし

○攪乱項の仮定

$E[\varepsilon_i] = 0$　平均０

$V[\varepsilon_i] = \sigma^2$　分散一定，かつ，有限

$\varepsilon_i, \varepsilon_j$ は独立

◇　不偏性：推定値の期待値が真の値になる

$$E[\hat{\alpha}] = \alpha$$

$$E[\hat{\beta}] = \beta$$

（説明）

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)\left(x_i-\bar{x}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{\alpha+\beta x_i+\varepsilon_i-\left(\alpha+\beta\bar{x}+\bar{\varepsilon}\right)\right\}\left(x_i-\bar{x}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{\beta\left(x_i-\bar{x}\right)+\left(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}\right)\right\}\left(x_i-\bar{x}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$$

$$=\beta+\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}\right)\left(x_i-\bar{x}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$$

$$=\beta+\frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\left(x_i-\bar{x}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$$

よって，

$$E\left[\hat{\beta}\right] = E[\beta] + E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (x_i - \overline{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}\right]$$

$$= \beta + E\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2} \varepsilon_i\right]$$

$$= \beta + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2} E[\varepsilon_i]$$

$$= \beta$$

$$E[\hat{\alpha}] = \left[\overline{y} - \hat{\beta}\overline{x}\right] = E\left[\alpha + \beta\overline{x} + \overline{\varepsilon} - \hat{\beta}\overline{x}\right]$$

$$= E\left[\alpha + \left(\beta - \hat{\beta}\right)\overline{x} + \overline{\varepsilon}\right]$$

$$= E[\alpha] + E\left[\left(\beta - \hat{\beta}\right)\overline{x}\right] + E[\overline{\varepsilon}]$$

$$= \alpha + \overline{x}E\left[\beta - \hat{\beta}\right] + E\left[(1/n)\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right]$$

$$= \alpha + \overline{x}E\left[\beta - \hat{\beta}\right] + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[\varepsilon_i]$$

$$= \alpha$$

◇ 一致性

$V(\hat{\alpha}),V(\hat{\beta})$がデータの数が増えるに従って小さくなる

（説明）

$$\hat{\beta}=\beta+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})}{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2}\varepsilon_i$$ と

$V[X+c]=V[X]$（c は定数），

$V[c_1X+c_2Y]=c_1^2V[X]+c_2^2V[Y]$

（X，Y が独立なら）

そして，ε_i が各 i について独立，

$$V[\hat{\beta}]=V\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})}{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2}\varepsilon_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})^2}{\left\{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2\right\}^2}V[\varepsilon_i]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})^2}{\left\{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2\right\}^2}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{\left\{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2\right\}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

n が大きくなると，$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\to\infty$ の場合には，

$V(\hat{\beta})$は n が大きくなると如何様にも小さくなる．

注意：$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\to\infty$ でない場合は一致性を持たない．例としては，講義資料，問題２－５，類題２－６を参照

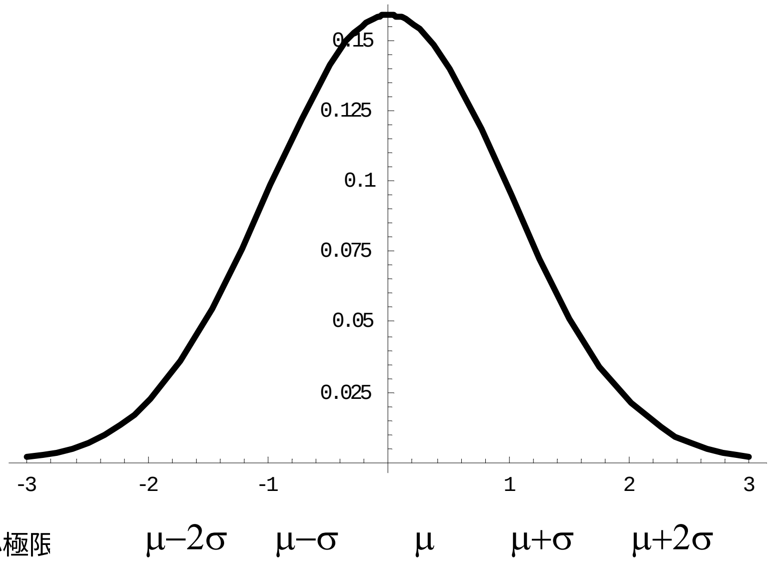
中心極限定理～正規分布での近似

◇正規分布

平均μ，分散σ^2 の正規分布：$N(\mu,\sigma)$

確率密度関数：

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$



◇中心極限

$X_1,\cdots,X_n$ が独立，$V[X_i]=\sigma^2$ のとき，

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{D}N(0,\sigma^2)$$

（説明）

$$V\left[\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 V[X_i]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V[X_i]$$
$$=V[X_i]=\sigma^2$$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2=a$ ならば，

$$\frac{a_1X_1+\cdots+a_nX_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{D}N(0,\sigma^2 a)$$

（説明）

$$V\left[\frac{a_1X_1+\cdots+a_nX_n}{\sqrt{n}}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{\sqrt{n}}\right)^2 V[X_i]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{n}V[X_i]$$
$$=\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$
$$=\sigma^2 a$$

◇　最小二乗推定量の近似分布

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ が存在するとする．

$$\hat{\beta}-\beta=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})}{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2}\varepsilon_i$$

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}-\beta\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})}{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2/n}\varepsilon_i$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})}{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2/n}\varepsilon_i$$

$$\xrightarrow{D} N\left(0,\sigma^2\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}^2}\right)$$

$$=N\left(0,\sigma^2\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}^{-1}\right)$$

から，

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}-\beta\right)\xrightarrow{D}N\left(0,\sigma^2\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right\}^{-1}\right)$$

近似による$\hat{\beta}$の分布

$$\frac{\sqrt{n}\left(\hat{\beta}-\beta\right)}{\sigma\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right\}^{-1/2}}=\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right\}^{-1/2}}$$

$$\xrightarrow{D}N(0,1)$$

しかし，σは不明.

σ^2を$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$で代用してもよい.

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right\}^{-1/2}}\xrightarrow{D}N(0,1)$$

標本平均の分布

DGP： $y_i=\mu+\varepsilon_i$， $E[\varepsilon_i]=0, V[\varepsilon_i]=\sigma^2, \varepsilon_i$は独立

回帰：$y_i=\hat{\mu}+\hat{u}_i$

推定量：$\hat{\mu}=\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$

不偏性：$E[\hat{\mu}]=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[y_i]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu$

一致性：

$$V[\hat{\mu}]=V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V[y_i]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

nが大きくなると標本平均の分散は0に近づく.

近似分布：

$$\sqrt{n}\left(\hat{\mu}-\mu\right)\xrightarrow{D}N\left(0,\sigma^2\right)$$

σ^2を$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$で代用するが，$\hat{u}_i=y_i-\hat{\mu}=y_i-\bar{y}$なので,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{y}-\mu)}{\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\right\}^{1/2}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

３章　　多変数回帰

◇回帰式

以後は回帰式と DGP が一致している（特定化の誤りがない）場合は DGP で回帰式も表す．

$$y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i \ (i = 1, \cdots n)$$

$E[\varepsilon_i] = 0, V[\varepsilon_i] = \sigma^2, \varepsilon_i$ は各 i に対して独立

$\hat{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_k$ を求める．

◇正規方程式

最小二乗法

$S = \sum_{i=1}^{n}\{y_i - (b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \cdots + b_k x_{ki})\}^2$ を $b_1, \cdots, b_k$ を動かして最小化．最小化したときの $\hat{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_k$ をとする．

一階条件

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial b_j} &= \frac{\partial}{\partial b_j}\sum_{i=1}^{n}\{y_i - (b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \cdots + b_k x_{ki})\}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\{y_i - (b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \cdots + b_k x_{ki})\}^2}{\partial b_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\{y_i - (b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \cdots + b_k x_{ki})\}^2}{\partial\{y_i - (b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \cdots + b_k x_{ki})\}} \right. \\
&\qquad \left. \times \frac{\partial\{y_i - (b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \cdots + b_k x_{ki})\}}{\partial b_j}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[2\{y_i - (b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \cdots + b_k x_{ki})\} \times (-x_{ji})\right] \\
&= -2\sum_{i=1}^{n}\{y_i - (b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \cdots + b_k x_{ki})\} x_{ji} \\
&= 0
\end{aligned}$$

これを満

たす $b_1,\cdots,b_k$ が $\hat\beta_1,\cdots,\hat\beta_k$ であるから，

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i-\left(\hat\beta_1x_{1i}+\hat\beta_2x_{2i}+\cdots+\hat\beta_kx_{ki}\right)\right\}x_{ji}=0\quad(j=1,\cdots,k)$$ が満たす

べき方程式．

$$\hat u_i=y_i-\left(\hat\beta_1x_{1i}+\hat\beta_2x_{2i}+\cdots+\hat\beta_kx_{ki}\right)$$

に注意すると，

$$\sum_{i=1}^{n}\hat u_ix_{ji}=0\quad(j=1,\cdots,k)$$

となり，残差と説明変数の積和が０というのが正規方程式．

◇計算方法

① 連立方程式（ｋ本の）

② 偏回帰係数の計算

1）x_{ji}（j番目の説明変数）を残りの変数に回帰し，

最小二乗法を行う．

つまり，

$$x_{ji}=\hat c_1x_{1i}+\cdots+\hat c_{j-1}x_{j-1,i}+\hat c_{j+1}x_{j+1,i}+\cdots+\hat c_kx_{ki}$$
$$+x_{ji}^{*}$$

回帰残差を x_{ji}^{*} とする．

2）y_i を x_{ji}^{*} に回帰し，最小二乗法を行う．つまり，

$$y_i=\hat\beta_j^{*}x_{ji}^{*}+\hat u_i^{*}$$

$$\hat\beta_j^{*}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_ix_{ji}^{*}}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ji}^{*}\right)^2}$$ （偏回帰係数）

実は，$\hat\beta_j^{*}=\hat\beta_j$

（偏回帰係数は最小二乗法推定量と一致）

3）さらに，y_i をj以外の変数に回帰し，最小二乗法を行った残差を y_i^{*} とすれば，つまり，

$$y_i=\hat a_1x_{1i}+\cdots+\hat a_{j-1}x_{j-1,i}+\hat a_{j+1}x_{j+1,i}+\cdots+\hat a_kx_{ki}$$
$$+y_i^{*}$$

としたなら，

$$y_i^{*}=\hat\beta_j^{*}x_{ji}^{*}+\hat u_i$$

となり，$\hat{\beta}_j^* = \hat{\beta}_j$ で，しかも，$\hat{u}_i$ は元の回帰式の最小二乗法残差と一致．（部分回帰則3とする）

注意：

①n変数に関しては上記の手順を繰り返す．つまり，

$$x_{ji} = \hat{c}_1 x_{1i} + \cdots + \hat{c}_{j-1} x_{j-1,i} + \hat{c}_{j+1} x_{j+1,i} + \cdots + \hat{c}_k x_{ki} + x_{ji}^*$$

で x_{ji}^* を計算する時に3）を適用する．

それを，一変数になるまで繰り返す．

② モデル $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ の場合，まず，x_i を1に回帰して，その残差は $x_i^* = x_i - \bar{x}$ となるから，yを x_i^* に回帰して，

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^* y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i^*)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^* y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^n x_i^*}{\sum_{i=1}^n (x_i^*)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^*(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i^*)^2}$$

（証明は教材プリント参照）

◇ 偏相関係数

$r_{xy|z_1,\cdots,z_k}$：$z_1,\cdots,z_k$ の影響をxとyとの取り除いた偏相関係数

まず，最小二乗法による回帰によってxとyの影響を取り除いた回帰残差を求める

$$x_i = \hat{c}_1 z_{1i} + \cdots + \hat{c}_k z_{ki} + x_i^*$$

$$y_i = \hat{d}_1 z_{1i} + \cdots + \hat{d}_k z_{ki} + y_i^*$$

その結果を利用して

$$r_{xy|z_1,\cdots,z_k} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^* y_i^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^*)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i^*)^2}}$$ で定義

注意：

$$r_{xy} = r_{xy|1} = r_{xy|\text{定数}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

これに従って以下定数項を含む場合は，無視して $r_{xy} = r_{xy|1}$ と書こう．

$$x_i^* = x_i - (\bar{x} + \hat{c}_2\bar{z}) - \hat{c}_2 z_i = x_i - \bar{x} - \hat{c}_2(z_i - \bar{z})$$

$$= x_i - \bar{x} - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}(z_i - \bar{z})$$

同様に，

$$y_i^* = y_i - \bar{y} - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}(z_i - \bar{z})$$

従って，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i^*$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i - \bar{y} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2}(z_i - \bar{z}) \right\} \left\{ x_i - \bar{x} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2}(z_i - \bar{z}) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2}$$

$$= n\left(S_{xy} - S_{xz}S_{zz}^{-1}S_{zy}\right)$$

また，

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^*\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{ x_i - \bar{x} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2}(z_i - \bar{z}) \right\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - \frac{\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})\right\}^2}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2}$$

$$= n\left(S_{xx} - S_{xz}^2 S_{zz}^{-1}\right)$$

同様に，

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^*\right)^2 = n\left(S_{yy} - S_{yz}^2 S_{zz}^{-1}\right)$$

よって，

$$r_{xy|1,z} = r_{xy|z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^*\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^*\right)^2}}$$

$$= \frac{S_{xy} - S_{xz}S_{zz}^{-1}S_{zy}}{\sqrt{S_{xx} - S_{xz}^2 S_{zz}^{-1}}\sqrt{S_{yy} - S_{yz}^2 S_{zz}^{-1}}}$$

$$= \frac{S_{xy}/\left(\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}\right) - S_{xz}/\left(\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{zz}}\right)S_{zy}/\left(\sqrt{S_{yy}}\sqrt{S_{zz}}\right)}{\sqrt{1 - S_{xz}^2 S_{zz}^{-1} S_{xx}^{-1}}\sqrt{S_{yy} - S_{yz}^2 S_{zz}^{-1} S_{yy}^{-1}}}$$

$$= \frac{r_{xy} - r_{xz}r_{zy}}{\sqrt{\left(1 - r_{xz}^2\right)\left(1 - r_{yz}^2\right)}}$$

◇　多重共線性（マルチコリニアリティ）

- ある説明変数が他の説明変数の線形和＝一次式で表される場合を言う．
- この場合，係数は一意に確定しないので，多くの回帰ソフトではエラーとなる．
- 厳密にある説明変数が他の説明変数の線形和＝一次式で表され無くても，近似的に線形和で表せる場合には，推定した係数値が不安定になる．

◇　決定係数
単回帰と同様

3　最小二乗推定量の分布

◇　係数の分散

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_{ji}^*}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{ji}^*\right)^2}$$ より，

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i\right) x_{ji}^*}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{ji}^*\right)^2}$$

$$x_{ji} = \hat{c}_1 x_{1i} + \cdots + \hat{c}_{j-1} x_{j-1,i} + \hat{c}_{j+1} x_{j+1,i} + \cdots + \hat{c}_k x_{ki} + x_{ji}^*$$ より，

$\sum_{i=1}^{n} x_{ji}^* x_{mi} = 0 \quad (m \neq j)$ であるから，

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\beta_j x_{ji}^* + \varepsilon_i\right) x_{ji}^*}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{ji}^*\right)^2} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ji}^* \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{ji}^*\right)^2}$$

となり，単回帰と同様な式（ただし単回帰では $x_i^* = x_i - \bar{x}$）となるので，

$$V\left(\hat{\beta}_j\right) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{ji}^*\right)^2}$$

◇　t統計量

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^*\right)^2}}}$$ は近似的に $N(0,1)$（平均 0 分散 1 正規分布）

◇　係数間の共分散と相関係数

$$\hat{\beta}_j - \beta_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ji}^* \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{ji}^*\right)^2}$$ より，

$$E\left[\left(\hat{\beta}_j-\beta_j\right)\left(\hat{\beta}_m-\beta_m\right)\right]$$

$$=E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{ji}^{*}\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ji}^{*}\right)^2}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{mi}^{*}\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{mi}^{*}\right)^2}\right)\right]$$

$$=E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{ji}^{*}x_{mi}\varepsilon_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=i+1}^{n}x_{ji}^{*}x_{mp}^{*}\varepsilon_i\varepsilon_p}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ji}^{*}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(x_{mi}^{*}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{ji}^{*}x_{mi}E\left[\varepsilon_i^2\right]+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=i+1}^{n}x_{ji}^{*}x_{mp}^{*}E\left[\varepsilon_i\varepsilon_p\right]}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ji}^{*}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(x_{mi}^{*}\right)^2}$$

$E\left[\varepsilon_i^2\right]=\sigma^2$，$\varepsilon_i$ の独立性より $E\left[\varepsilon_i\varepsilon_p\right]=0$ であるから，

$$\mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}_j,\hat{\beta}_m\right)=E\left[\left(\hat{\beta}_j-\beta_j\right)\left(\hat{\beta}_m-\beta_m\right)\right]$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{ji}^{*}x_{mi}^{*}}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ji}^{*}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(x_{mi}^{*}\right)^2}\sigma^2$$

相関係数は，

$$\mathrm{Cor}\left(\hat{\beta}_j,\hat{\beta}_m\right)=\frac{\mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}_j,\hat{\beta}_m\right)}{\sqrt{V\left(\hat{\beta}_j\right)V\left(\hat{\beta}_m\right)}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_{ji}^{*}x_{mi}}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ji}^{*}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(x_{mi}^{*}\right)^2}\sigma^2}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ji}^{*}\right)^2}\dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{mi}^{*}\right)^2}}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{ji}^{*}x_{mi}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ji}^{*}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(x_{mi}^{*}\right)^2}}$$

4. 最小二乗推定量の諸性質

- 回帰に変数を追加すると残差は減少し，R^2 も減少する．

（説明）

$$y_i=\beta_0x_{0i}+\beta_1x_{1i}+\cdots+\beta_{k-1}x_{k-1,i}+\beta_k+\varepsilon_i \qquad \text{(A)}$$

$$y_i=\beta_1x_{1i}+\cdots+\beta_{k-1}x_{k-1,i}+\beta_k+\varepsilon_i \qquad \text{(B)}$$

とする．ただし，(A) の残差を $\hat{u}_A$，(B) の残差を $\hat{u}_B$ とすると，$\hat{u}_B=y^*$．また，最小二乗残差 x_{0i}^{*} を

$$x_{0i}=\hat{c}_1x_{1i}+\cdots+\hat{c}_{k-1}x_{k-1,i}+\hat{c}_k+x_{0i}^{*}$$

とすると，部分回帰則３から，

$$\hat{u}_{Bi} = \hat{\beta}_0 x^*_{0i} + \hat{u}_{Ai}$$

となる．ここから，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{Bi}^2 &= \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{Ai}^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_0^2\left(x^*_{0i}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{Ai}^2 + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x^*_{0i}y^0_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(x^*_{0i}\right)^2}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(x^*_{0i}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{Ai}^2 + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x^*_{0i}y^0_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x^*_{0i}\right)^2}\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{u}_{Bi}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y^*_{0i}\right)^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{Ai}^2 + r^2_{yx_0|\text{他の説明変数}}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{u}_{Bi}\right)^2\end{aligned}$$

従って，$\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{Ai}^2 = \left(1-r^2_{yx_0|\text{他の説明変数}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{u}_{Bi}\right)^2$．$1 \geq 1-r^2_{yx_0|\text{他の説明変数}} \geq 0$ より，$\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{Ai}^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{u}_{Bi}\right)^2$

- t統計量の再定義と偏相関係数との関係

［t統計量］

いままでは，$t_{\beta_j} = \dfrac{\left(\hat{\beta}_j - \beta_j\right)}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n}\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(x^*_i\right)^2}}}$ と定義してきたが，次章で説明する自由度の関係から，

$$t_{\beta_j} = \frac{\left(\hat{\beta}_j - \beta_j\right)}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n-K}\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(x^*_i\right)^2}}}$$

と定義する．

［偏相関係数との関係］

$$t^2_{\beta_j} = (n-K)\frac{r^2}{1-r^2}$$

ただし，$r = r_{yx_j|\text{他の説明変数}}$

（説明）

$$y_i = \beta_0 x_{0i} + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_{k-1}x_{k-1,i} + \beta_k + \varepsilon_i \qquad \text{(A)}$$

$$y_i = \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_{k-1}x_{k-1,i} + \beta_k + \varepsilon_i \qquad \text{(B)}$$

とする．（A）の残差を $\hat{u}_A$，（B）の残差を $\hat{u}_B$ とすると，

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{Ai}^2 = \left(1-r^2_{yx_0|\text{他の説明変数}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{u}_{Bi}\right)^2$$

となるが，ここから，

$$r^2_{yx_0|\text{他の説明変数}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{u}_{Bi}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\hat{u}^2_{Ai}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{u}_{Bi}\right)^2} \qquad (あ)$$

一方,

$$t_{\beta_0} = \frac{\left(\hat{\beta}_0 - \beta_0\right)}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}^2_{iA}}{n-K}\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^*\right)^2}}}$$

より,

$$t^2_{\beta_0} = (n-K)\frac{\left(\hat{\beta}_0 - \beta_0\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^*\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}^2_{iA}}$$

また, $y_i = \beta_0 x_{0i} + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_{k-1}x_{k-1,i} + \beta_k + \varepsilon_i$ を, 最小二乗残差 x^*_{0i} を

$$x_{0i} = \hat{c}_1 x_{1i} + \cdots + \hat{c}_{k-1}x_{k-1,i} + \hat{c}_k + x^*_{0i}$$

として, 二段階目の回帰

$$\hat{u}_{Bi} = \hat{\beta}_0 x^*_{0i} + \hat{u}_{Ai}$$

でおこなうことを考えると, この式での

回帰変動＋残差変動＝総変動

の関係から,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\beta}_0 x_i^* - \beta_0 x_i^*\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}u^2_{iA} = \left(\hat{\beta}_0 - \beta_0\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^*\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}u^2_{iA}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}y_i^* = \sum_{i=1}^{n}u^2_{iB}$$

となり,

$$\left(\hat{\beta}_0 - \beta_0\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^*\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}u^2_{iB} - \sum_{i=1}^{n}u^2_{iA}$$

よって,

$$t^2_{\beta_0} = (n-K)\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}^2_{iB} - \sum_{i=1}^{n}\hat{u}^2_{iA}}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}^2_{iA}} \qquad (い)$$

(あ) と (い) を組み合わせると結果を得る.