# １イニング中の出塁数の期待値の計算の仕方

（前提）

ｐを出塁確率とする．

1イニングに$B$人出塁する確率 $= {}_{B+2}C_2\, p^B (1-p)^3$

出塁数平均$=(B\times B$人出塁する確率$)$の合計 $=\sum_{B=0}^{\infty} B\, {}_{B+2}C_2\, p^B (1-p)^3$

（計算の方針）

$E[r^X] = \left(r^{1\text{イニング中の出数塁}}\right)$の期待値 が計算できたとしよう．これを，確率母関数と呼び，ｒの関数として$G(r)$とかこう．

$G(r)$をｒで微分する．$G'(r) = E\left[\dfrac{d}{dr} r^X\right] = E\left[X r^{X-1}\right]$.

$r$に１を代入すると，$G'(1) = E\left[X \cdot 1^{X-1}\right] = E[X]$．つまり，確率母関数をｒについて１回微分すると期待値（ここでは，１イニングの出塁数の期待値）が計算できる．

（確率母関数を計算する）

１イニングあたりの出塁数に関する確率をすべて合計すれば，全ての事象の確率合計は必ず１になるので，$\sum_{B=0}^{\infty} {}_{B+2}C_2\, p^B (1-p)^3 = 1$．したがって，$\sum_{B=0}^{\infty} {}_{B+2}C_2\, p^B = 1/(1-p)^3$．この式は，ｐが出塁確率だけではなく，もっと一般的な数でも当てはまるので，ｐのかわりにα を 用 い て $f(\alpha) = \sum_{B=0}^{\infty} {}_{B+2}C_2\, \alpha^B = 1/(1-\alpha)^3$ と 書 い て お こ う ．

$$G(r) = E[r^X] = \left(r^{1\text{イニング中の出数塁}}\right)\text{の期待値} = \sum_{B=0}^{\infty} r^B\, {}_{B+2}C_2\, p^B (1-p)^3$$

$$= (1-p)^3 \sum_{B=0}^{\infty} {}_{B+2}C_2 (rp)^B = (1-p)^3 f(rp) = (1-p)^3/(1-rp)^3$$

（１イニング中の出塁数の期待値の計算）

$$G'(r) = \frac{d}{dr}\left\{\frac{(1-p)^3}{(1-rp)^3}\right\} = (1-p)^3 \frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{(1-rp)^3}\right\} = (1-p)^3 \frac{3p}{(1-rp)^4} = \frac{3p(1-p)^3}{(1-rp)^4}$$

$$E[X] = G'(1) = \frac{3p(1-p)^3}{(1-1\cdot p)^4} = \frac{3p}{1-p}$$