金融時系列と線型モデル，条件付き分散不均一モデル

［AR(p)］

$$x_t = \mu + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

［AR(p)の場合の ACF の求め方］

$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$ のとき，

$$\gamma(k) = \phi_1 \gamma(k-1) + \cdots + \phi_p \gamma(k-p) \quad (k \ge p)$$

$1 < k < p$ については，$\gamma(-k) = \gamma(k)$ で書き換える．
ただし，初期条件は，

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & -\phi_1 & \cdots & -\phi_{p-1} & -\phi_p \\ 0 & -\phi_2 & \iddots & -\phi_p & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & -\phi_p & \iddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ -\phi_{p-1} & -\phi_{p-2} & \ddots & 1 & 0 \\ -\phi_p & -\phi_{p-1} & \cdots & -\phi_1 & 1 \end{bmatrix}\right\} \begin{bmatrix} \gamma(0) \\ \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma(p-1) \\ \gamma(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

の方程式から求める．$\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$

（説明）
＜変形規則＞

$$E[\varepsilon_t x_{t-k}] = 0 \quad (k \ge 1)$$

$$E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$$

$$E[x_t x_{t-k}] = \gamma(k)$$
$$E[x_t x_{t+k}] = \gamma(-k) = \gamma(k)$$

$$E[x_t x_{t-(k-m)}] = E[x_{t-k} x_{t-m}] = \gamma(k-m) = \gamma(m-k)$$

＜派生規則＞

$$E[x_t \varepsilon_t] = E[\varepsilon_t(\phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t)] = \phi_1 E[\varepsilon_t X_{t-1}] + \cdots + \phi_p E[\varepsilon_t X_{t-p}] + E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$$

＜DGP＞

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

＜漸化式の導出＞

$\times x_{t-k}\ (k>1)$ して，期待値をとる

$$E[x_t x_{t-k}] = \phi_1 E[x_{t-1} x_{t-k}] + \cdots + \phi_p E[x_{t-p} x_{t-k}] + E[\varepsilon_t x_{t-k}]$$

$$\gamma(k) = \phi_1 \gamma(k-1) + \cdots + \phi_p \gamma(k-p)$$

＜初期条件の決定＞

$\times x_t$ して，期待値をとる

$$E[x_t^2] = \phi_1 E[x_{t-1} x_t] + \cdots + \phi_p E[x_{t-p} x_t] + E[\varepsilon_t x_t]$$

$$\gamma(0) = \phi_1 \gamma(1) + \cdots + \phi_p \gamma(p) + \sigma^2$$

$\gamma(k) = \phi_1 \gamma(k-1) + \cdots + \phi_p \gamma(k-p)$ で $k=1$ とする.

$$\gamma(1) = \phi_1 \gamma(0) + \phi_2 \gamma(1) + \cdots + \phi_p \gamma(p-1)$$

$$\gamma(2) = \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(0) + \phi_3 \gamma(1) + \cdots + \phi_p \gamma(p-2)$$

$\vdots$

$$\gamma(p) = \phi_1 \gamma(p-1) + \phi_2 \gamma(p-2) + \cdots + \phi_p \gamma(0)$$

以上の式を連立して初期条件を計算し，その後，$\gamma(k) = \phi_1 \gamma(k-1) + \cdots + \phi_p \gamma(k-p)$ で逐次計算する．$p=4$ の場合は,

$$\begin{bmatrix} 1 & -\phi_1 & -\phi_2 & -\phi_3 & -\phi_4 \\ -\phi_1 & 1-\phi_2 & -\phi_3 & -\phi_4 & 0 \\ -\phi_2 & -\phi_1-\phi_3 & 1-\phi_4 & 0 & 0 \\ -\phi_3 & -\phi_2-\phi_4 & -\phi_1 & 1 & 0 \\ -\phi_4 & -\phi_3 & -\phi_2 & -\phi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma(0) \\ \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \gamma(3) \\ \gamma(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

一般的な場合について，要素の法則性を明らかにした形で初期値の決定式を表すと,

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & -\phi_1 & \cdots & -\phi_{p-1} & -\phi_p \\ 0 & -\phi_2 & \iddots & -\phi_p & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & -\phi_p & \iddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ -\phi_{p-1} & -\phi_{p-2} & \ddots & 1 & 0 \\ -\phi_p & -\phi_{p-1} & \cdots & -\phi_1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \gamma(0) \\ \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma(p-1) \\ \gamma(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

（例）

AR(2)の場合，

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & -\phi_1 & -\phi_2 \\ 0 & -\phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\phi_1 & 1 & 0 \\ -\phi_2 & -\phi_1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \gamma(0) \\ \gamma(1) \\ \gamma(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\phi_1 & -\phi_2 \\ -\phi_1 & 1-\phi_2 & 0 \\ -\phi_2 & -\phi_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma(0) \\ \gamma(1) \\ \gamma(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これを解くと，$\gamma(0) = \dfrac{1-\phi_2}{(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)(1+\phi_2)}\sigma^2$

$$\gamma(1) = \frac{\phi_1}{(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)(1+\phi_2)}\sigma^2$$

$$\gamma(2) = \frac{\phi_1^2+\phi_2-\phi_2^2}{(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)(1+\phi_2)}\sigma^2$$

$\gamma(3) = \phi_1\gamma(2)+\phi_2\gamma(1)$ より

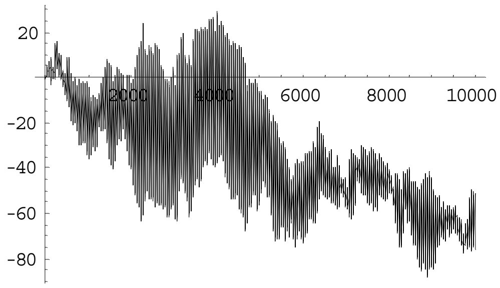
$$\gamma(3) = \frac{\phi_1\left(\phi_2^2-2\phi_2+\phi_1^2\right)}{(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)(1+\phi_2)}\sigma^2$$

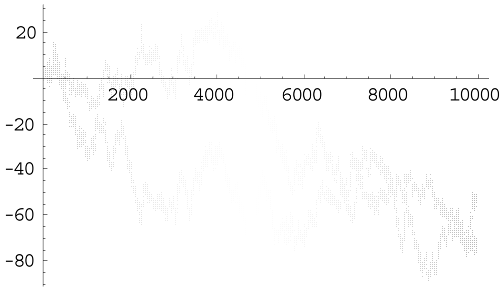
よって，

$$\rho(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, \rho(2) = \frac{\phi_1^2+\phi_2-\phi_2^2}{1-\phi_2}, \rho(3) = \frac{\phi_1\left(\phi_2^2-2\phi_2+\phi_1^2\right)}{1-\phi_2}$$

（注意）

$\phi_2 = 1$のとき分散が０になるように見えるが，この場合は，定常ではないため，分散の式そのものが成立しない．そのため，自己相関関数の式も成立しない．ちなみに，$x_t = x_{t-2} + \varepsilon_t$の場合の系列は下左図の様になる．これは，季節単位根過程と呼ばれるもので，偶数期と奇数期がそれぞれ別なランダムウォーク過程になる．下右図の下側が偶数期，上側が奇数期である．





さらに，定常性の条件は$\gamma(0)=\dfrac{1-\phi_2}{(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)(1+\phi_2)}\sigma^2$の分母が0になる条件，すなわち，$\phi_1+\phi_2=1$, $\phi_1-\phi_2=-1$, $\phi_2=-1$の(ϕ_1,ϕ_2)の内側となる．

［PAC(k)の求め方］

以下の方程式をといて PAC(k)を決定する．（この式は，PAC(k)の決定にのみ有効で，PAC(m)（$m\neq k$）の決定には使ってはいけない．）

$$E\left[\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}^t\right]\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ \mathrm{PAC}(k) \end{bmatrix}=E\left[\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}x_t\right]$$

これは，＜変形規則＞を利用すると，

$$\begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(k-2) & \gamma(k-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \ddots & \gamma(k-3) & \gamma(k-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \gamma(k-2) & \gamma(k-3) & \ddots & \gamma(0) & \gamma(1) \\ \gamma(k-1) & \gamma(k-2) & \cdots & \gamma(1) & \gamma(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ \mathrm{PAC}(k) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(k) \end{bmatrix}$$

となる．

[PAC と AR 過程]

AR(p)すなわち，$x_t=\phi_1 x_{t-1}+\cdots+\phi_k x_{t-p}+\varepsilon_t\ (\phi_k\neq 0)$に従っていたなら，

$\mathrm{PAC}(p)=\phi_k\neq 0$，$\mathrm{PAC}(p+m)=0\ \ (m\geq 1)$

（$E\left[\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}^t\right]\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ \mathrm{PAC}(k) \end{bmatrix}=E\left[\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}x_t\right]$で PAC を決める意味）

（説明）

もし，$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_k x_{t-k} + \varepsilon_t$ に従っていれば，

$x_t = \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_k \end{bmatrix} + \varepsilon_t$ と書き直せるので，$E\left[\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}^t\right]\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ PAC(k) \end{bmatrix} = E\left[\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix} x_t\right]$ に代入して，

$$E\left[\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}^t\right]\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ PAC(k) \end{bmatrix} = E\left[\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_k \end{bmatrix} + \varepsilon_t\right)\right]$$

$$= E\left[\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}^t\right]\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_k \end{bmatrix} + E\left[\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}\varepsilon_t\right] = E\left[\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}^t\right]\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_k \end{bmatrix}$$

となる．

$$E\left[\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}^t\right] = \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(k-2) & \gamma(k-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \ddots & \gamma(k-3) & \gamma(k-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \gamma(k-2) & \gamma(k-3) & \ddots & \gamma(0) & \gamma(1) \\ \gamma(k-1) & \gamma(k-2) & \cdots & \gamma(1) & \gamma(0) \end{bmatrix}$$

が逆行列を持てば，$PAC(k) = \phi_k$ となる．（実際持つことがわかっている）

さらに，PAC(k+1)については，$x_t = \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \\ x_{t-(k+1)} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_k \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_t$ と表せることから，先ほどの考え方により，$PAC(k+1) = 0$ となることがいえる．$PAC(k+m) = 0$ も同様.

[x_t の期待値が０でない場合]
期待値を引いて考える．つまり，x_t を $x_t - E[x_t]$ に置き換えて考える．

［SPACF の求め方］

$$\begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(k-2) & \gamma(k-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \ddots & \gamma(k-3) & \gamma(k-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \gamma(k-2) & \gamma(k-3) & \ddots & \gamma(0) & \gamma(1) \\ \gamma(k-1) & \gamma(k-2) & \cdots & \gamma(1) & \gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ PAC(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(k) \end{bmatrix}$$

の自己共分散を標本自己共分散に変える．

$$\begin{bmatrix} \hat{\gamma}(0) & \hat{\gamma}(1) & \cdots & \hat{\gamma}(k-2) & \hat{\gamma}(k-1) \\ \hat{\gamma}(1) & \hat{\gamma}(0) & \ddots & \hat{\gamma}(k-3) & \hat{\gamma}(k-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hat{\gamma}(k-2) & \hat{\gamma}(k-3) & \ddots & \hat{\gamma}(0) & \hat{\gamma}(1) \\ \hat{\gamma}(k-1) & \hat{\gamma}(k-2) & \cdots & \hat{\gamma}(1) & \hat{\gamma}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ PAC(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}(1) \\ \hat{\gamma}(2) \\ \vdots \\ \hat{\gamma}(k) \end{bmatrix}$$

［定常性］
弱定常性（２次定常性，共分散定常）
$E[x_t] = \mu$ （時間に関して不変）
$\gamma(k) = E[(x_t - \mu)(x_{t-k} - \mu)] = \gamma_k$ （いかなる k に対しても k のみに依存）
このほかに strictly stationary(狭義定常性)があるが省略（こちらは構造変化の問題を扱う）

［AR(1)としてのランダムウォーク過程］
$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$ において $\phi = 1$ とすると, RW３, すなわち, $\Delta x_t = \varepsilon_t$（$E[\varepsilon_t] = 0, E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}] = 0$）が得られる．$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t = (x_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = x_0 + \varepsilon_t + \cdots + \varepsilon_1$ となる．
従って x_0 が与えられているときの条件付き分散は，$V[x_t \mid x_0] = V\left[\sum_{s=1}^{t} \varepsilon_s\right] = \sum_{s=1}^{t} V[\varepsilon_s] = t\sigma^2$.

$$V_{x_t}[x_t] = E_{x_0}[V[x_t|x_0]] + V_{x_0}[E[x_t|x_0]] = E_{x_0}[t\sigma^2] + V_{x_0}[x_0] = t\sigma^2 + V_{x_0}[x_0]$$

定常性を仮定すると，$\gamma(0) = V_{x_0}[x_0] = V_{x_t}[x_t]$ となるが，$\gamma(0) = t\sigma^2 + \gamma(0)$ となるが，矛盾する．よって定常ではない．

［MA 過程］

$$x_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

$$x_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

［MA 過程と ACF］

$$x_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

$$x_{t-k} = \varepsilon_{t-k} + \theta_1\varepsilon_{t-k-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-k-q}$$

$\theta_0 = 1$とする

$$\begin{aligned}\gamma(k) &= E[x_t x_{t-k}] = E[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-k} + \theta_1\varepsilon_{t-k-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-k-q})] \\ &= E[\theta_k\varepsilon_{t-k}^2] + E[\theta_{k+1}\theta_1\varepsilon_{t-k-1}^2] + \cdots + E[\theta_q\theta_{q-k}\varepsilon_{t-q}^2] \\ &= \sigma^2(\theta_k\theta_0 + \theta_{k+1}\theta_1 + \cdots + \theta_q\theta_{q-k}) \\ &= \sigma^2\sum_{j=0}^{q-k}\theta_{k+j}\theta_j\end{aligned}$$

$$\rho(k) = \frac{\sum_{j=0}^{q-k}\theta_{k+j}\theta_j}{\sum_{j=0}^{q}\theta_j^2}$$

$$\rho(q) = \frac{\sum_{j=0}^{0}\theta_{q+j}\theta_j}{\sum_{j=0}^{q}\theta_j^2} = \frac{\theta_q}{\sum_{j=0}^{q}\theta_j^2}(\neq 0)$$

$$\rho(q+1) = \frac{\sum_{j=0}^{q-(q+1)}\theta_{q+1+j}\theta_j}{\sum_{j=0}^{q}\theta_j^2} = 0$$

［SACF,SPACF を使った AR，MA 過程の同定］

AR(p)の場合

$\mathrm{PACF}(p) \neq 0,\ \mathrm{PACF}(p+1) = 0$から，$\mathrm{SPACF}(p+1)$以降が 0 に近い値をとる．さらに，$\mathrm{s.e.}(\mathrm{SPACF}(p+m)) \approx 1/\sqrt{n}\ \ (m \geq 1)$なので，$\mathrm{PACF}(p+m) = 0$ という帰無仮

説の下で棄却域は $|\mathrm{SPACF}(p+m)| > 1.96/\sqrt{n}$ となる．逆に $|\mathrm{SPACF}(p+m)| \le 1.96/\sqrt{n}$ なら，$\mathrm{PACF}(p+m)=0$ という帰無仮説が支持されるので，AR 次数は p となる．

MA(q)の場合

$\rho(q) \neq 0, \rho(q+1)=0, \rho(q+2)=0, \cdots$ なので，$\hat{\rho}(q+m)$ が 0 に近い値をとるはず．

s.e.$(\hat{\gamma}(p+m)) \approx 1/\sqrt{n}$ $(m \ge 1)$ なので，$\gamma(p+m)=0$ という帰無仮説の下で棄却域は $|\hat{\gamma}(p+m)| > 1.96/\sqrt{n}$ となる．逆に $|\hat{\gamma}(p+m)| \le 1.96/\sqrt{n}$ なら，$\gamma(p+m)=0$ という帰無仮説が支持されるので，MA 次数は p となる．

［AR 過程のパラメータ推定］

いったん AR(p)とわかったなら，$x_t = \mu + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$ より，この回帰を最小二乗法で行えばよい．

［MA 過程のパラメータ推定］

推定の問題点は，ε_t がわからないこと．だから，まず ε_t を決定する漸化式を求める．

$\varepsilon_t = x_t - \mu - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$，初期条件 $\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = \cdots = 0$ で考える．もし，$\mu, \theta_1, \cdots, \theta_q$ をなんらかの値に固定してあげれば，上記の漸化式で ε_t を計算できる．$\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2$ を最小にする $\mu, \theta_1, \cdots, \theta_q$ を探せばよい．

探し方，Excel なら，ソルバーを使える．

R の例

［ARMA 過程］

AR と MA 過程の混合モデル

$$x_t = \mu + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

ACF の計算

$k > q$ のとき，

$$x_t x_{t-k} = \phi_1 x_{t-1} x_{t-k} + \cdots + \phi_p x_{t-p} x_{t-k} + \varepsilon_t x_{t-k} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} x_{t-k} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} x_{t-k}$$

$$E[x_t x_{t-k}] = \phi_1 E[x_{t-1}x_{t-k}] + \cdots + \phi_p E[x_{t-p}x_{t-k}] + E[\varepsilon_t x_{t-k}] + \theta_1 E[\varepsilon_{t-1}x_{t-k}] + \cdots + \theta_q E[\varepsilon_{t-q}x_{t-k}]$$

$$\gamma(k) = \phi_1\gamma(k-1) + \cdots + \gamma_p\gamma(k-p)$$

$k \le q$ のとき,

$$x_t\varepsilon_t = \phi_1 x_{t-1}\varepsilon_t + \cdots + \phi_p x_{t-p}\varepsilon_t + \varepsilon_t^2 + \theta_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}\varepsilon_t$$

$$E[x_t\varepsilon_t] = \phi_1 E[x_{t-1}\varepsilon_t] + \cdots + \phi_p E[x_{t-p}\varepsilon_t] + E[\varepsilon_t^2] + \theta_1 E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t] + \cdots + \theta_q E[\varepsilon_{t-q}\varepsilon_t] = \sigma^2$$

$$x_t\varepsilon_{t-1} = \phi_1 x_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}\varepsilon_{t-1}$$

$$\begin{aligned} E[x_t\varepsilon_{t-1}] &= \phi_1 E[x_{t-1}\varepsilon_{t-1}] + \cdots + \phi_p E[x_{t-p}\varepsilon_{t-1}] + E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}] + \theta_1 E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}] + \cdots + \theta_q E[\varepsilon_{t-q}\varepsilon_{t-1}] \\ &= \phi_1 E[x_t\varepsilon_t] + \theta_1\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[x_t\varepsilon_{t-2}] &= \phi_1 E[x_{t-1}\varepsilon_{t-2}] + \phi_2 E[x_{t-2}\varepsilon_{t-2}] \cdots + \phi_p E[x_{t-p}\varepsilon_{t-2}] \\ &\quad + E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}] + \theta_1 E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}] + \theta_2 E[\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-2}] + \cdots + \theta_q E[\varepsilon_{t-q}\varepsilon_{t-2}] \\ &= \phi_1 E[x_t\varepsilon_{t-1}] + \phi_2 E[x_t\varepsilon_t] + \theta_2\sigma^2 \end{aligned}$$

一般的な漸化式

$$E[x_t\varepsilon_t] = \sigma^2$$

$$E[x_t x_{t-k}] = \phi_k E[x_t\varepsilon_t] + \cdots + \phi_1 E[x_t\varepsilon_{t-k+1}] + \theta_k\sigma^2 \quad (k \ge 1)$$

$$\begin{bmatrix} E[x_t\varepsilon_t] \\ E[x_t\varepsilon_{t-1}] \\ E[x_t\varepsilon_{t-2}] \\ \vdots \\ E[x_t\varepsilon_{t-k}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \phi_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \phi_2 & \phi_1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \phi_k & \phi_{k-1} & \cdots & \phi_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[x_t\varepsilon_t] \\ E[x_t\varepsilon_{t-1}] \\ \vdots \\ E[x_t\varepsilon_{t-k+1}] \\ E[x_t\varepsilon_{t-k}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{k-1} \\ \theta_k \end{bmatrix}\sigma^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_2 & -\phi_1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\phi_k & -\phi_{k-1} & \cdots & -\phi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[x_t\varepsilon_t] \\ E[x_t\varepsilon_{t-1}] \\ E[x_t\varepsilon_{t-2}] \\ \vdots \\ E[x_t\varepsilon_{t-k}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{k-1} \\ \theta_k \end{bmatrix}\sigma^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_2 & -\phi_1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\phi_k & -\phi_{k-1} & \cdots & -\phi_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ f_2 & f_1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f_k & f_{k-1} & \cdots & f_1 & 1 \end{bmatrix}$$ とおくと，

$f_k = \phi_k + f_{k-1}\phi_{k-1} + \cdots + f_1\phi_1$ であることがわかる．

$$\begin{bmatrix} E[x_t\varepsilon_t] \\ E[x_t\varepsilon_{t-1}] \\ E[x_t\varepsilon_{t-2}] \\ \vdots \\ E[x_t\varepsilon_{t-k}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ f_2 & f_1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f_k & f_{k-1} & \cdots & f_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{k-1} \\ \theta_k \end{bmatrix} \sigma^2$$

$$x_t^2 = \phi_1 x_{t-1}x_t + \cdots + \phi_p x_{t-p}x_t + \varepsilon_t x_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}x_t + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}x_t$$

$$E[x_t^2] = \phi_1 E[x_{t-1}x_t] + \cdots + \phi_p E[x_{t-p}x_t] + E[\varepsilon_t x_t] + \theta_1 E[\varepsilon_{t-1}x_t] + \cdots + \theta_q E[\varepsilon_{t-q}x_t]$$

$$\begin{aligned} E[x_t x_{t-1}] &= \phi_1 E[x_{t-1}x_{t-1}] + \cdots + \phi_p E[x_{t-p}x_{t-1}] + E[\varepsilon_t x_{t-1}] + \theta_1 E[\varepsilon_{t-1}x_{t-1}] + \cdots + \theta_q E[\varepsilon_{t-q}x_{t-1}] \\ &= \phi_1 E[x_t x_t] + \phi_2 E[x_{t-1}^2] + \cdots + \phi_p E[x_t x_{t-(p-1)}] \\ &\quad + E[\varepsilon_{t+1}x_t] + \theta_1 E[\varepsilon_t x_t] + \cdots + \theta_q E[\varepsilon_{t-(q-1)}x_t] \end{aligned}$$

$p \geq q$

$$\left\{\begin{bmatrix}0 & -\phi_1 & \cdots & -\phi_{p-1} & -\phi_p\\ 0 & -\phi_2 & \iddots & -\phi_p & 0\\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots\\ 0 & -\phi_p & \iddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -\phi_1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ -\phi_{p-1} & -\phi_{p-2} & \ddots & 1 & 0\\ -\phi_p & -\phi_{p-1} & \cdots & -\phi_1 & 1\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\gamma(0)\\ \gamma(1)\\ \vdots\\ \gamma(p-1)\\ \gamma(p)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \theta_1 & \cdots & \theta_{p-1} & \theta_q\\ \theta_1 & \theta_2 & \iddots & \theta_q & 0\\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots\\ \theta_{q-1} & \theta_q & \iddots & 0 & 0\\ \theta_q & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \multicolumn{5}{c}{O_{p-q,q+1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E[x_t\varepsilon_t]\\ E[x_t\varepsilon_{t-1}]\\ \vdots\\ E[x_t\varepsilon_{t-q-1}]\\ E[x_t\varepsilon_{t-q}]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \theta_1 & \cdots & \theta_{p-1} & \theta_q\\ \theta_1 & \theta_2 & \iddots & \theta_q & 0\\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots\\ \theta_{q-1} & \theta_q & \iddots & 0 & 0\\ \theta_q & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \multicolumn{5}{c}{O_{p-q,q+1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ f_1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ f_2 & f_1 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ f_q & f_{q-1} & \cdots & f_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \theta_1\\ \vdots\\ \theta_{q-1}\\ \theta_q\end{bmatrix}\sigma^2$$

$p < q$

$$\left\{\begin{bmatrix}0 & -\phi_1 & \cdots & -\phi_{p-1} & -\phi_p\\ 0 & -\phi_2 & \iddots & -\phi_p & 0\\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots\\ 0 & -\phi_p & \iddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -\phi_1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ -\phi_{p-1} & -\phi_{p-2} & \ddots & 1 & 0\\ -\phi_p & -\phi_{p-1} & \cdots & -\phi_1 & 1\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\gamma(0)\\ \gamma(1)\\ \vdots\\ \gamma(p-1)\\ \gamma(p)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \theta_1 & \cdots & \theta_p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \theta_q\\ \theta_1 & \theta_2 & \iddots & \theta_{p+1} & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & 0\\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots\\ \theta_p & \theta_{p+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \theta_q & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ f_1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ f_2 & f_1 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ f_q & f_{q-1} & \cdots & f_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \theta_1\\ \vdots\\ \theta_{q-1}\\ \theta_q\end{bmatrix}\sigma^2$$

［ARMA 過程の推定］

MA 過程と同様

［AIC による ARMA 過程の決定］

$$\text{AIC}=\log\hat{\sigma}^2+2\frac{p+q+1}{T}$$ （定数項ありの場合）

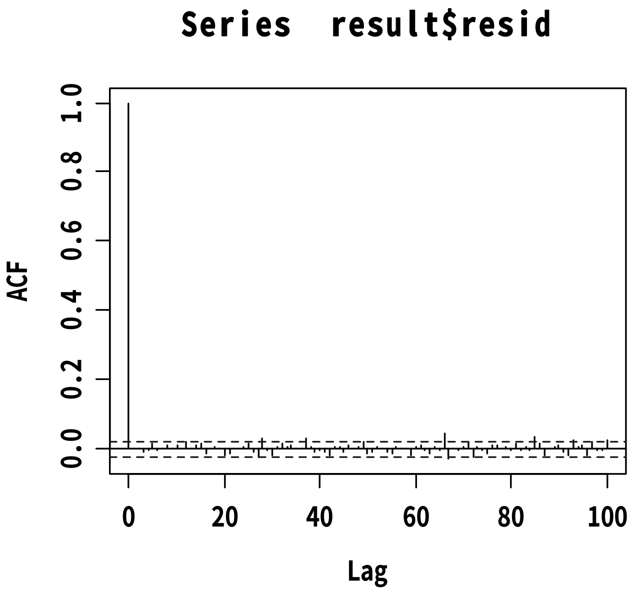
$$\text{AIC}=\log\hat{\sigma}^2+2\frac{p+q}{T}$$ （定数項なしの場合）

AIC が最小のモデルを選ぶ.

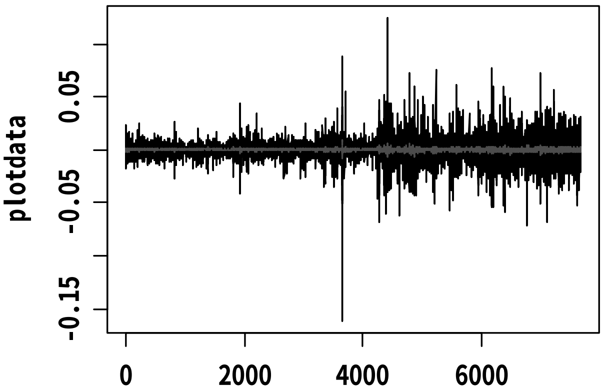
（例）日経２２５日次複利収益率

```
aroder<- -1;
maorder <- -1;
aicmin<-10000000;
for(i in 0:5)
        for(j in 0:5) {
                result <- arima(retnikkei, order=c(i,0,j));
                if (result$aic < aicmin){
                        aicmin<- result$aic;
                        arorder<- i; maorder<- j
                }
        };
print(c(arorder, maorder, aicmin))

[1]     3.00     5.00 -46468.43

> result <- arima(retnikkei, order=c(arorder,0,maorder));
警告メッセージ：
収束に関する問題の可能性: optim  は以下のコードを与えました：1 in: arima(retnikkei, order
= c(arorder, 0, maorder))
> result

Call:
arima(x = retnikkei, order = c(arorder, 0, maorder))

Coefficients:
         ar1      ar2      ar3      ma1      ma2     ma3      ma4      ma5
      0.5722  -0.0344  -0.6289  -0.5641  -0.0301  0.6907  -0.0161  -0.0464
s.e.  0.0114   0.0131   0.0152   0.0210   0.0162  0.2087   0.0232   0.0162
```

```
         intercept
              1e-04
s.e.          1e-04

sigma^2 estimated as 0.000136:  log likelihood = 23244.21,  aic = -46468.43
```

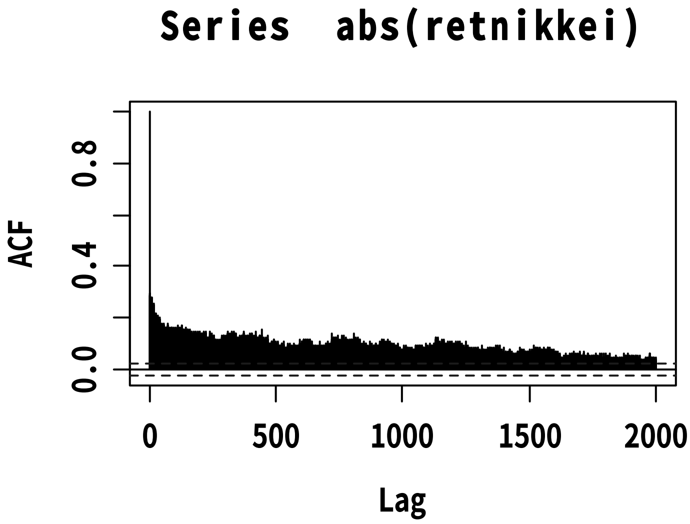



```
> Box.test(result$resid, lag=100, type=c("Ljung-Box"))

         Box-Ljung test

data:  result$resid
X-squared = 133.1595, df = 100, p-value = 0.01491

> predictdata<- retnikkei - result$resid
> plotdata<- cbind(retnikkei, predictdata)
> matplot(plotdata, type="l")
```

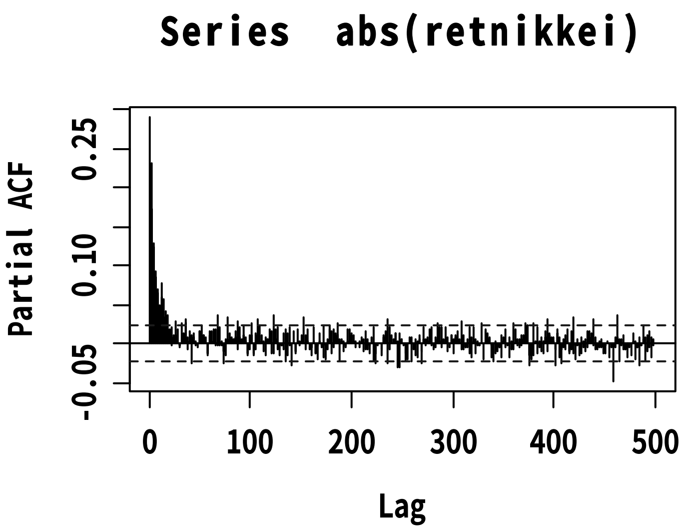


［Long Memory 過程］

> acf(abs(retnikkei), lag=2000)



>pacf(abs(retnikkei), lag=500)




```
> aggvarFit(retnikkei)

Title:
Hurst Exponent from Aggregated Variances

Call:
aggvarFit(x = retnikkei)

Method:
Aggregated Variance Method

Hurst Exponent:
        H       beta
 0.5319445 -0.9361109

Hurst Exponent Diagnostic:
   Estimate    Std.Err   t-value     Pr(>|t|)
X 0.5319445 0.02373784 22.40913 4.52827e-27

Parameter Settings:
      n   levels  minnpts cut.off1 cut.off2
    7665     50        3        5      316

Description:
```

Fri Jun 03 10:20:26 2005

0.5 以上なら長期記憶あり　境界線上

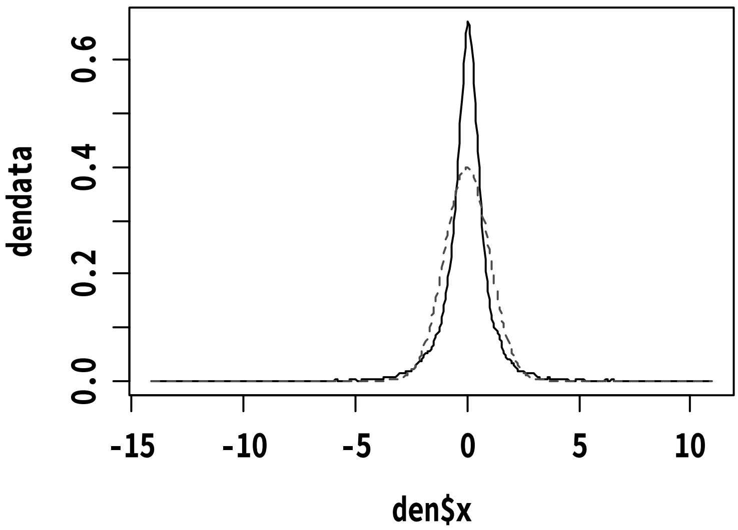
［分散不均一性の処理］

(日次収益率の分布)

実線：収益率／標準偏差（収益率）の推定された密度関数，分散１に規準化

点線：N(0,1)の密度関数

```
> den<-density(retnikkei/sd(retnikkei))
> dendata<-cbind(den$y,dnorm(den$x))
> matplot(den$x, dendata, type="l")
```



(非正規性)

Q-Q プロット

経験分布関数とは，（横軸座標，縦軸座標）として $\left(\mathrm{t}, \frac{\mathrm{t}\text{以下のデータ数}}{\text{標本数}}\right)$ **をプロットしたものである．しかし，これでは正規分布との違いがよくわからないない．そのために，Q-Qプロットといわれるものを描く．** $\Phi(\mathrm{t})$ **を標準正規分布の確率分布関数とする．よって，Xが正規分布に従い，その平均がμ，標準偏差がσとすれば，**

$$\Pr\left(\frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma} \le \mathrm{t}\right) = \Phi(\mathrm{t})$$

である．よって，

$$\Pr(X \le \mu + t\sigma) = \Phi(t)$$

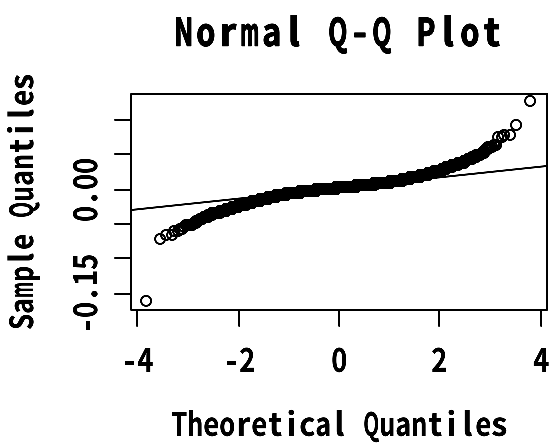
である．標準正規分布のqパーセンタイルを z_q **とすると，**

$$\Pr(X \le \mu + z_q\sigma) = \Phi(z_q) = q$$

となり， $\Phi(z_q) = q$ **より** $z_q = \Phi^{-1}(q)$ **となるので，** $\Pr(X \le \mu + \sigma\Phi^{-1}(q)) = q$ **．**

つまり，X の q パーセンタイル X_q **は** $\mu + \sigma\Phi^{-1}(q)$ **である．従って，** $(X_q, \Phi^{-1}(q))$ **をプロットすると線形になるはずである．** q **は** $\dfrac{\text{データ値以下のデータ数}}{\text{標本数}}$ でわかるので，結局，データが正規分布に従っていれば，$\left(\text{データ値}, \Phi^{-1}\left(\dfrac{\text{データ値以下のデータ数}}{\text{標本数}}\right)\right)$ の全てのデータ値に対するプロットは直線に近くなるはずである．これを Q-Q プロットと呼ぶ．

```
> qqnorm(retnikkei)
> qqline(retnikkei)
```



なぜおこるか？

（１） 分布がもともと非正規だから．→安定分布

しかし，先ほどの Long Memory の推定では，Hurst Exponet は 0.5 と有意に異ならなかった．もし，収益率が正規分布以外の安定分布なら，Hurst Exponet は 0.5 と異なるはずである．

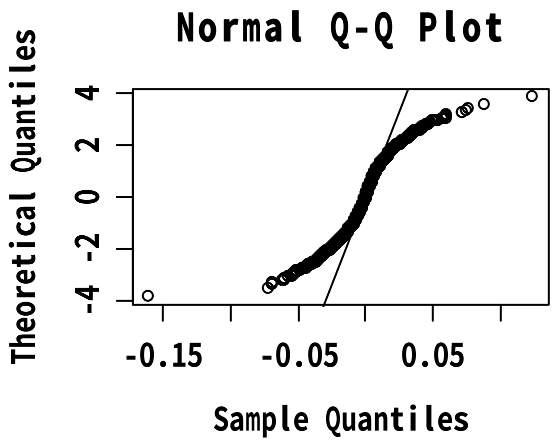
（２） 正規分布の混合プロセスだから

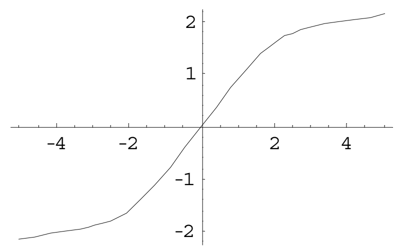
(混合正規分布)

日経２２５日次収益率と確率０．５で N(0,1)，確率０．５で N(0,10)の場合の Q-Q プロット

> qqnorm(retnikkei, datax=TRUE)

> qqline(retnikkei, datax=TRUE)





（ARCH の仲間たち）

＜Volatility＞

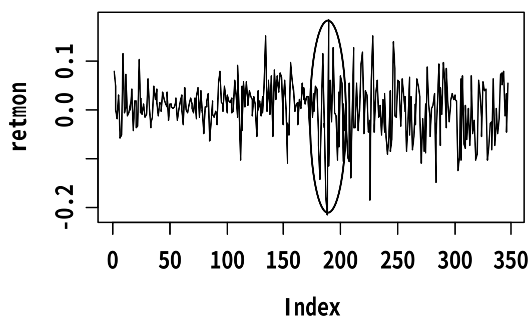
$\mu_t = E[x_t | F_{t-1}]$＜F_{t-1} は t －１期までの情報＞

$\sigma_t^2 = V(x_t | F_{t-1}) = E[(x_t - \mu_t)^2 | F_{t-1}]$(条件付き分散)

$\mu_t = 0$ だから，近似的に $\sigma_t^2 = V(x_t | F_{t-1}) = E[x_t^2 | F_{t-1}]$.

日経２２５月次収益率

変動の激しい時期とそうでない時期



・Volatility の特徴

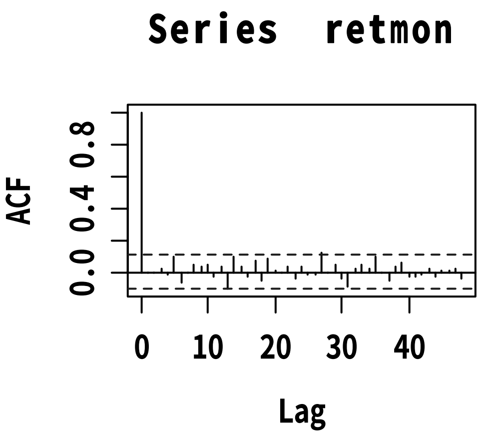
Volatility Clustering(収益率変動の激しい時期がかたまる)

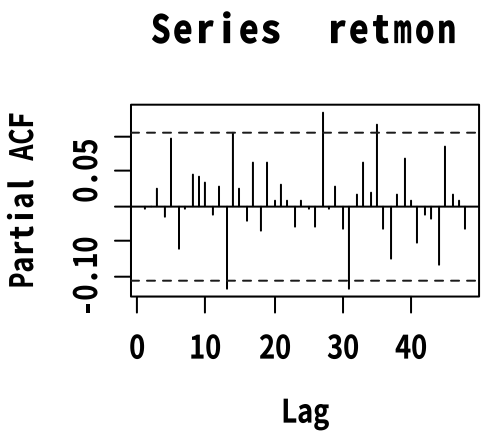
Volatility jump はほとんどない　　Volatility は連続

Volatility は特定の範囲内でのみ変化する　　Volatility は定常

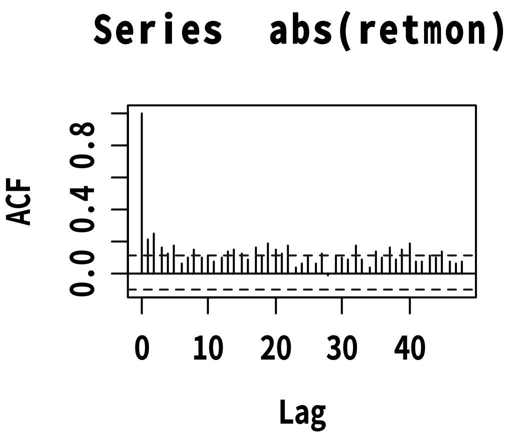
Leverage Effect　　　　Volatility は価格変化と負の相関を持つ

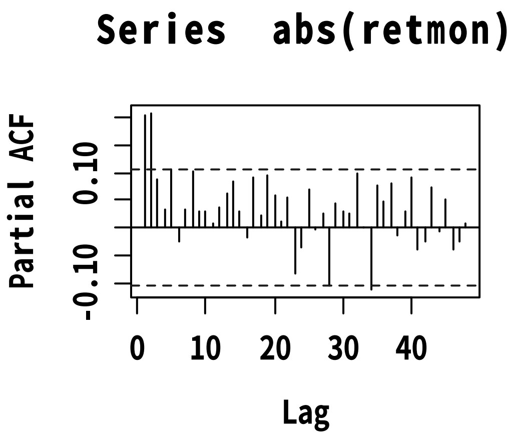
＜月次収益率＞



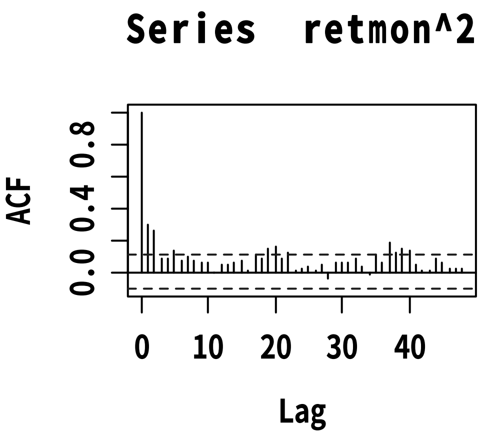


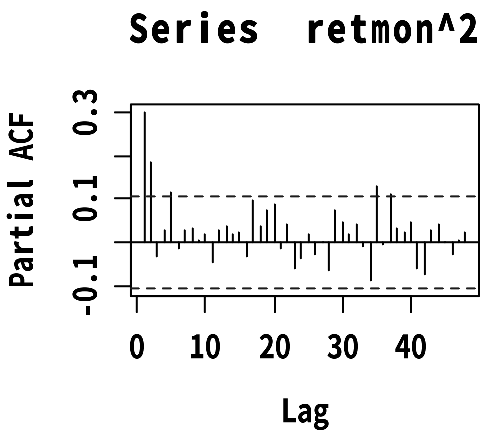
月次には相関はない.





絶対値には２，３月の範囲で相関がある.





２乗値には２，３月の範囲で相関がある．

$\mu_t = E[x_t | F_{t-1}]$の計算．

```
> aroder<- -1;
> maorder <- -1;
> aicmin<-10000000;
> for(i in 0:6)
+ for(j in 0:6) {
+ result <- arima(retmon, order=c(i,0,j));
+ if (result$aic < aicmin){
+ aicmin<- result$aic;
+ arorder<- i; maorder<- j
+ }
+ };
> print(c(arorder, maorder, aicmin))
[1]     0.000     0.000 -1024.185

result<- arima(retmon, order=c(0,0,0));
> print(result)

Call:
arima(x = retmon, order = c(0, 0, 0))

Coefficients:
```

intercept

0.0029

s.e. 0.0030

sigma^2 estimated as 0.003025: log likelihood = 514.09, aic = -1024.18

$$\mu_t = E[x_t | F_{t-1}] = 0$$

$$x_t = \varepsilon_t$$

しかし，volatility 変化をモデル化する．

<ARCH(m)>

$$r_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \phi_i a_{t-i} + a_t$$

a_t をショック，mean-corrected return とよぶ

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

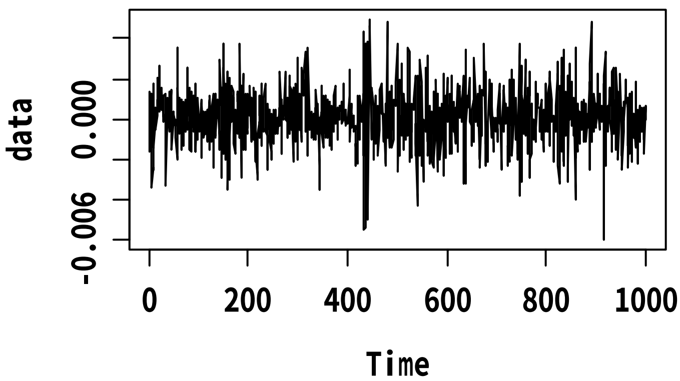
$$\varepsilon_t \sim \mathrm{IID}(0,1)$$

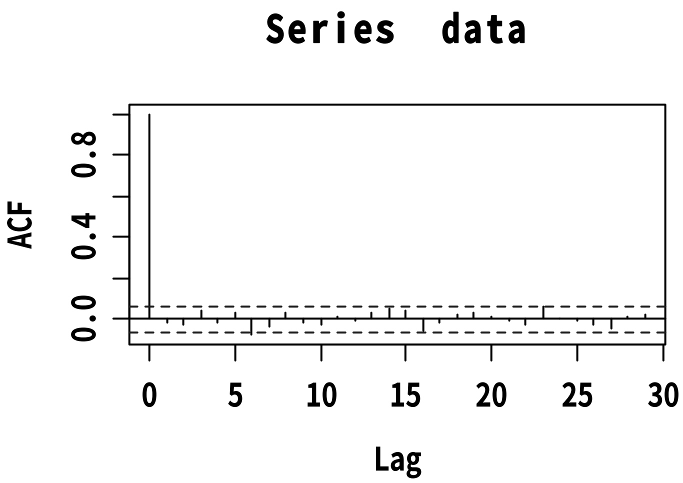
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2 \quad (\alpha_i > 0)$$

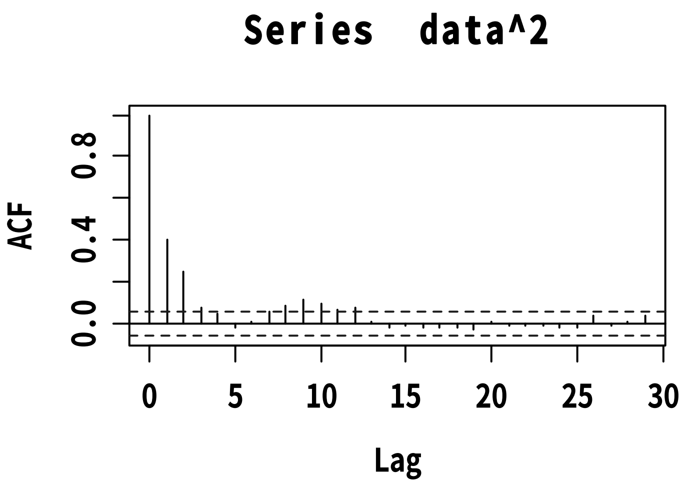
一般的には ε_t は N(0,1)，または，t(df)/s.e.(t(df))と考えられる．

過去の大きなショックは大きな Volatility をもたらしやすい． Volatility Clustering

$\sigma_t^2 = 1e(-6) + \frac{1}{\sqrt{3}} a_{t-1}^2$ のとき







性質(ARCH(1)の場合)

$$a_t = \varepsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2}$$

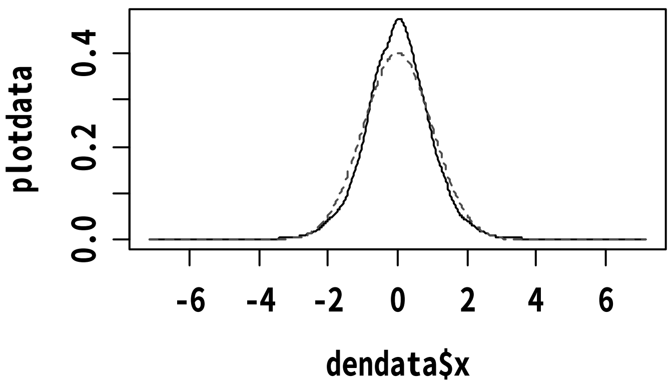
- $$\begin{aligned} E[a_t] &= E_{a_{t-1}} E[a_t | a_{t-1}] = E_{a_{t-1}} E\left[\varepsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2} \middle| a_{t-1}\right] = E_{a_{t-1}}\left[\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2}\, E[\varepsilon_t]\right] = E_{a_{t-1}}[0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

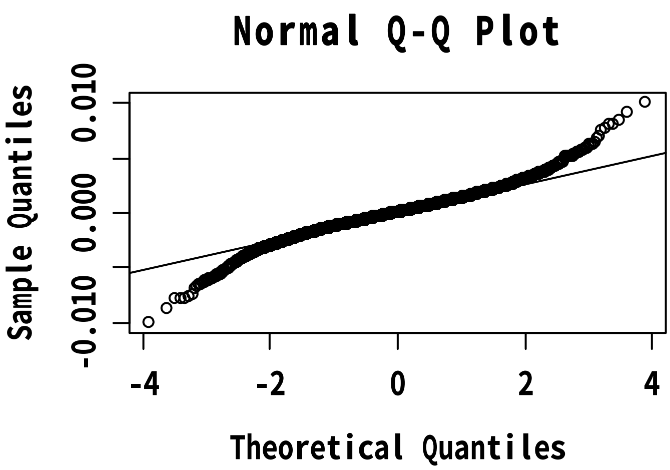
- $$\begin{aligned} V[a_t] &= V_{a_{t-1}}\left[E[a_t | a_{t-1}]\right] + E_{a_{t-1}}\left[V[a_t | a_{t-1}]\right] \\ &= V_{a_{t-1}}\left[E\left[\varepsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2} \middle| a_{t-1}\right]\right] + E_{a_{t-1}}\left[V\left[\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2}\,\varepsilon_t \middle| a_{t-1}\right]\right] \\ &= V_{a_{t-1}}[0] + E_{a_{t-1}}\left[\left(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2\right) V[\varepsilon_t]\right] \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 E\left[a_{t-1}^2\right] = \alpha_0 + \alpha_1 V[a_{t-1}] \end{aligned}$$

定常性から，$V[a_t]=V[a_{t-1}]$なので，$V[a_t]=\dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$. ここから, 定常性のためには, $1-\alpha_1>0$

が必要なこともわかる.

・正規分布よりも大きい裾をもつ.（点線標準正規）





＜ARCH の欠点＞

・プラスのショックもマイナスのショックも volatility に同一のショックをもたらす.

・4次のモーメント$E[a_t^4]$を持つためには, ARCH(1)の場合$0\le\alpha_1^2\le 1/3$でなければならない.

高次の ARCH ではこの条件は複雑になる.

・大きな孤立したのショックに対してゆっくり反応していくので，volatility を大きめに予測

＜ARCH 推定の手順＞

１．線形時系列モデルからの乖離を考える．ＡＲＭＡ推定のやり方を使う．（特に日次）

２．その残差系列，$\hat{\varepsilon}_t$ を対象とする．

３．この系列に条件付き分散不均一性があるかを調べる

（ア）$\hat{\varepsilon}_t^2$ の系列相関を Ljung – Box テストで検定

（イ）$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m \hat{\varepsilon}_{t-m}^2 + \varepsilon_t$ の回帰において，全係数の有意性検定であるＦテストを行う．（ＬＭ検定）

４．分散不均一性の次数を決める

$\hat{\varepsilon}_t^2$ の SPAC で次数を決める．

５．推定を行う

６．モデルのチェック

$\tilde{a}_t = \hat{\varepsilon}_t / \sigma_t$ を標準化ショックと呼ぶ

（ア）$\tilde{a}_t = \hat{\varepsilon}_t / \sigma_t$ に対して Ljung-Box テスト

（イ）$\tilde{a}_t = \hat{\varepsilon}_t / \sigma_t$ に対してＱ－Ｑプロット

（ウ）$\tilde{a}_t = \hat{\varepsilon}_t / \sigma_t$ の基本統計量を調べる

＜例＞

日経２２５月次収益率

１．線形時系列モデルからの乖離を考える．ＡＲＭＡ推定のやり方を使う．

すでにみたとおりＡＲＭＡ（０，０），つまり，Random Walk

そのままの系列を使用.

２．省略

３．この系列に条件付き分散不均一性があるかを調べる

（ア）Ljung-Box テスト

```
> for(i in 1:5) print(Box.test(ret.mon^2, lag=i))

        Box-Pierce test

data:   ret.mon^2
X-squared = 31.2103, df = 1, p-value = 2.315e-08


        Box-Pierce test
```

```
data:   ret.mon^2
X-squared = 53.8953, df = 2, p-value = 1.981e-12


        Box-Pierce test

data:   ret.mon^2
X-squared = 56.7467, df = 3, p-value = 2.911e-12


        Box-Pierce test

data:   ret.mon^2
X-squared = 59.3207, df = 4, p-value = 4.029e-12


        Box-Pierce test

data:   ret.mon^2
X-squared = 66.1834, df = 5, p-value = 6.367e-13
```

ということで，確かに分散不均一性はありそうである．

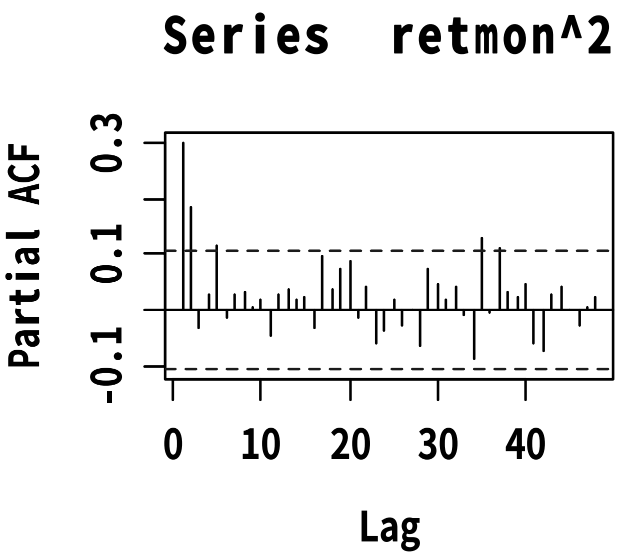
（イ）ＬＭ検定

```
x<- (ret.mon[6:length(ret.mon)])^2
lag1<-(ret.mon[5:(length(ret.mon)-1)])^2
lag2<-(ret.mon[4:(length(ret.mon)-2)])^2
lag3<-(ret.mon[3:(length(ret.mon)-3)])^2
lag4<-(ret.mon[2:(length(ret.mon)-4)])^2
lag5<-(ret.mon[1:(length(ret.mon)-5)])^2
r<-lm(x~lag1+lag2+lag3+lag4+lag5)
summary(r)

Call:
lm(formula = x ~ lag1 + lag2 + lag3 + lag4 + lag5)
```

```
Residuals:
       Min         1Q     Median        3Q        Max
-0.0092388 -0.0022304 -0.0013865  0.0003802  0.0361517

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.0015467  0.0003729   4.147 4.26e-05 ***
lag1         0.2475140  0.0541703   4.569 6.89e-06 ***
lag2         0.1894369  0.0558214   3.394 0.000772 ***
lag3        -0.0585674  0.0566672  -1.034 0.302098
lag4        -0.0023138  0.0558402  -0.041 0.966972
lag5         0.1180351  0.0541764   2.179 0.030047 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.005075 on 336 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.1338,     Adjusted R-squared: 0.1209
F-statistic: 10.38 on 5 and 336 DF,  p-value: 2.855e-09
```

（イ）の方法でもやはり，分散不均一性はある．

４．分散不均一性の次数を決める



５次くらいか（２次もあり）

５．推定

```
> library(tseries)
> r.arch<- garch(ret.mon, order=c(0,5))
> summary(r.arch)
Call:
garch(x = ret.mon, order = c(0, 5))

Model:
GARCH(0,5)

Residuals:
（残差）
    Min      1Q          Median      3Q           Max
  （最小値）（第１四分位）（中央値）（第３四分位）（最大値）
  -3.9797 -0.4719       0.1530    0.7141        3.6800

Coefficient(s):
（係数）
    Estimate  Std. Error    t value  Pr(>|t|)
     （推定値）（標準誤差）   （t 値）   （p 値）
a0 0.0011892   0.0002034    5.846  5.02e-09 ***
a1 0.1732990   0.0732212    2.367    0.0179 *
a2 0.1660008   0.0905517    1.833    0.0668 .
a3 0.0814976   0.0863993    0.943    0.3455
a4 0.1103221   0.0727329    1.517    0.1293
a5 0.1179515   0.0790294    1.493    0.1356
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Diagnostic Tests:
（診断テスト）
        Jarque Bera Test
         （ベラーハルケ検定～帰無仮説：正規分布，正規分布のとき小さい値，カイ２乗分布）
data:  Residuals
```

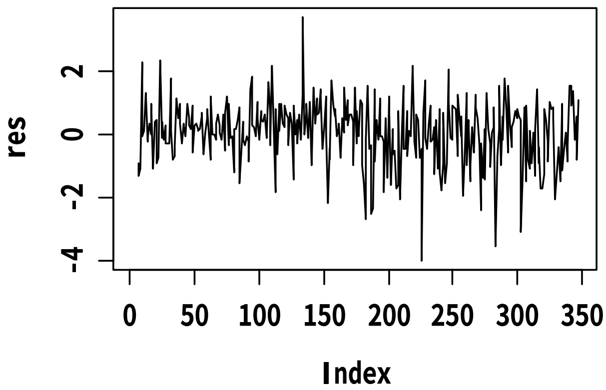
X-squared = 35.2969, df = 2, p-value = 2.165e-08
（統計量値）　　　　　（自由度）（ｐ値）
（統計量値が大きく，ｐ値が小さいので，帰無仮説：正規分布が棄却され，残差は正規ではない）

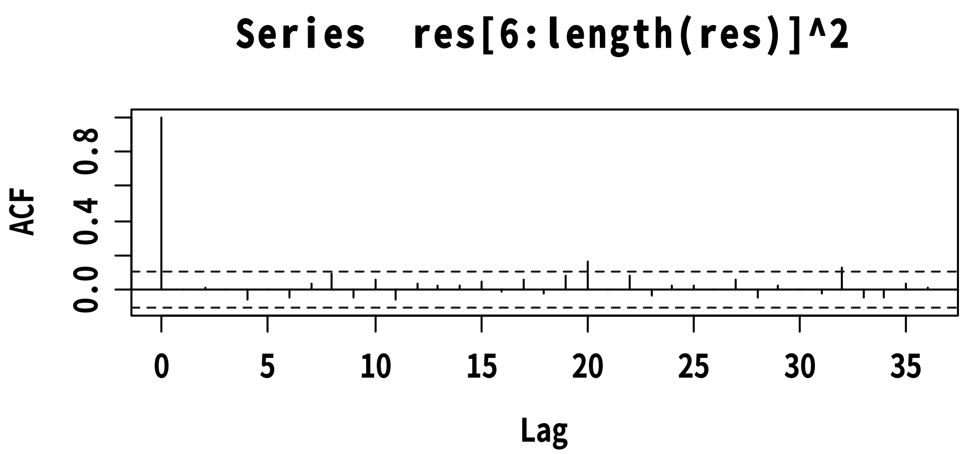
```
        Box-Ljung test

data:  Squared.Residuals
X-squared = 0.0099, df = 1, p-value = 0.9206
```

（統計量値）　　　　　（自由度）　（ｐ値）
（統計量値が小さく，ｐ値が大きい．帰無仮説：残差の２乗に系列相関はないは棄却され，系列相関はない）

```
> res<- r.arch$resid
> plot(res, type="l")
```

標準化ショックのプロット

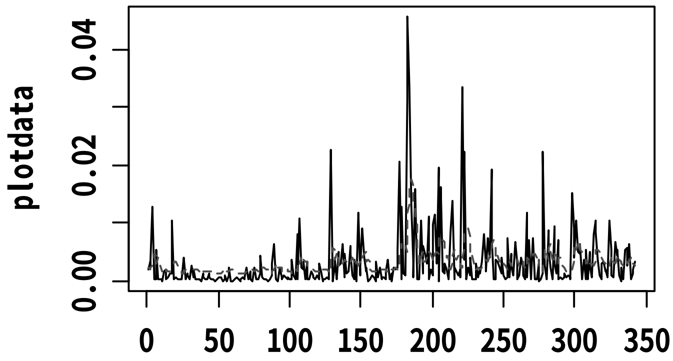




実際の収益率^2（実線）と Volatility $E[r_t^2]$ (点線)のプロット

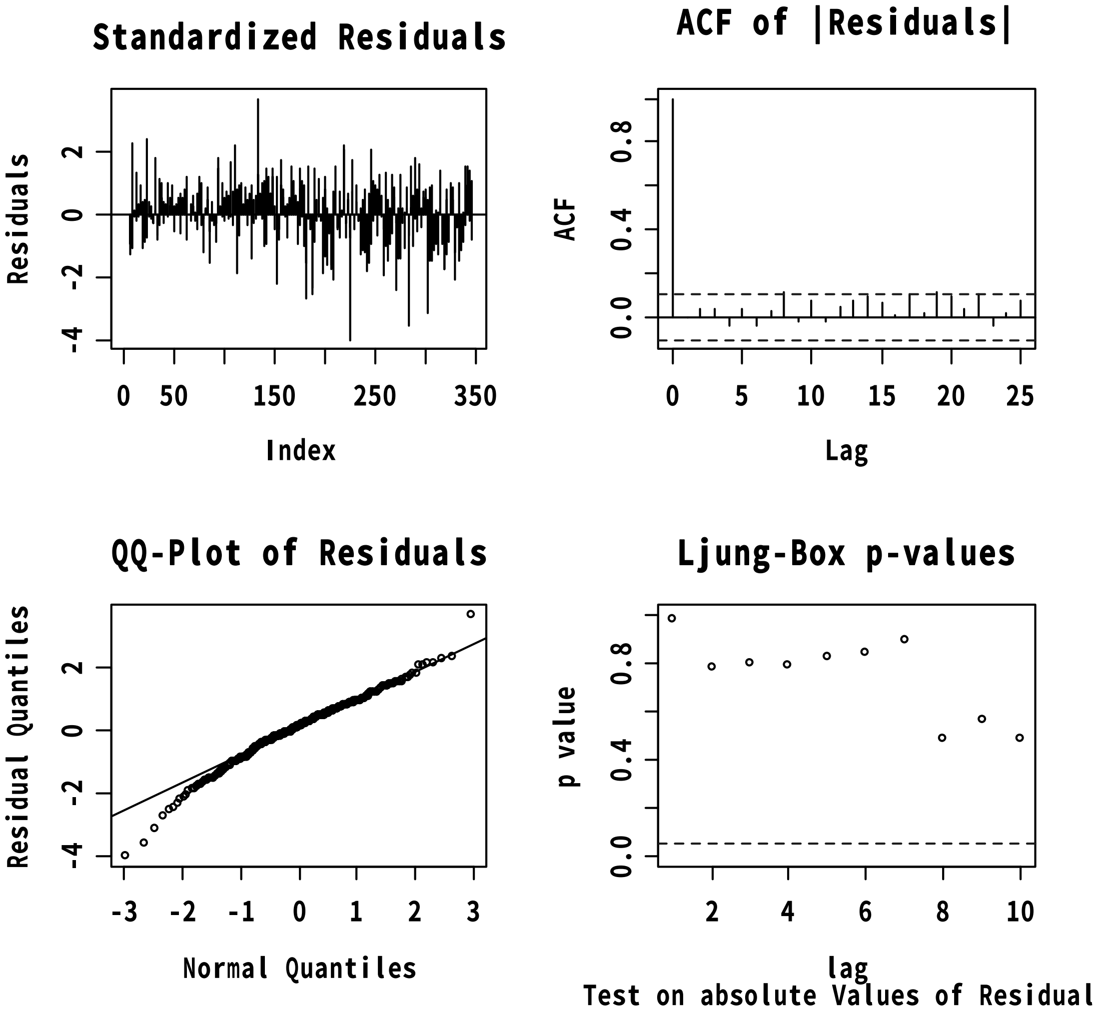
２乗値（実線）とボラティリティ値（点線）をプロットする

```
> plotdata<- cbind(ret.mon[6:length(ret.mon)]^2,
      r.arch$fitted.values[6:length(ret.mon),1]^2)
>matplot(plotdata, type="l")
```



６．チェック

```
> r.arch<- garchFit(ret.mon, order=c(0,5))
> opar<-par(mfrow=c(2,2))
> plot(r.arch)
> par(opar)
```



自己相関は消えている.

> basicStats(res)

	Value
nobs	347.00000000
NAs	5.00000000
Minimum	-3.97971168
Maximum	3.67999316
1. Quartile	-0.47193653
3. Quartile	0.71407865
Mean	0.06073388
Median	0.15295071
Sum	20.77098702
SE Mean	0.05405309

LCL Mean	-0.04558558
UCL Mean	0.16705334
Variance	0.99923389
Stdev	0.99961687
Skewness	-0.47375137
Kurtosis	1.22867549

標準化ショックは依然として Fat tail を持っている．

＜GARCH(m,s)＞

$$r_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \phi_i a_{t-i} + a_t$$

a_t をショック，mean-corrected return とよぶ

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim \mathrm{IID}(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_s \sigma_{t-s}^2 \quad (\alpha_i > 0, \beta_i > 0)$$

ARCH だと観測可能なデータからボラティリティが確定的にわかる．しかし，GARCH は観測できない（推定はできる）σ_{t-k}^2 が入っているので，ボラティリティを確定的に知ることはできない．しかし，潜在的にはボラティリティの確定的漸化式が存在する．

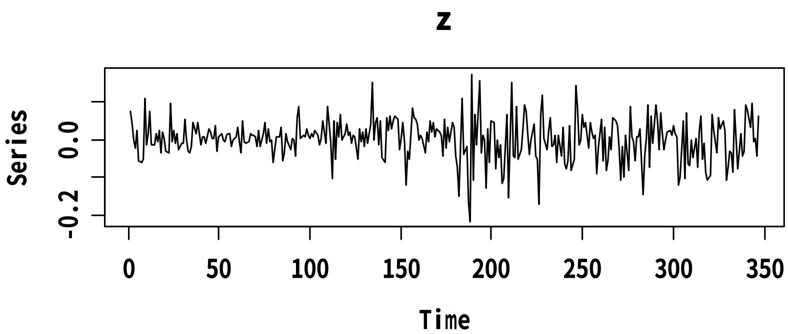
次数の決定

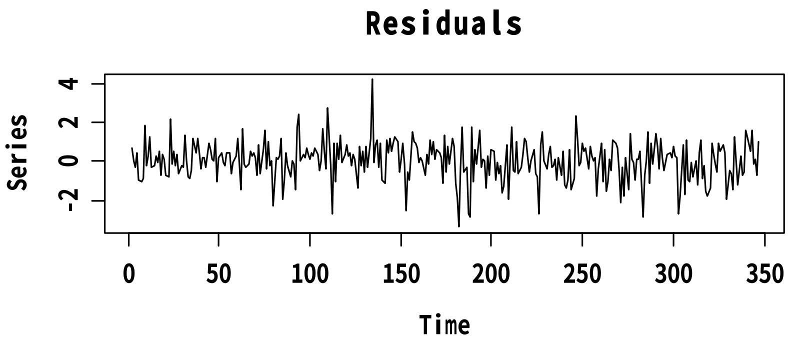
まず，library(tseries)，library(fSeries)を実行．

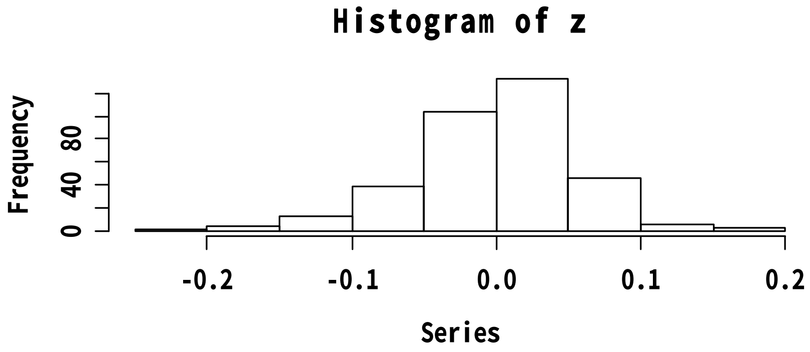
（最小のＡＩＣのモデルを選ぶ）

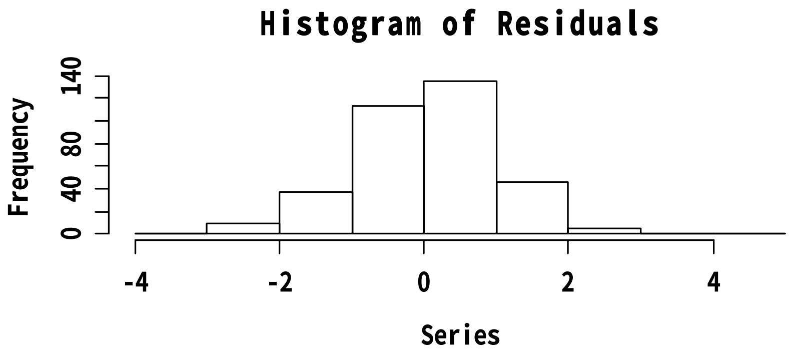
```
data=ret.mon
result.arma<- arima(data, order=c(3, 0, 5));
z<-result.arma$res;

aroder<- -1;
maorder <- -1;
aicmin<-Inf;
for(i in 0:9)
        for(j in 1:9) {
                result <- garch(z, order=c(i,j), itmax=20000, grad="numerical");
```

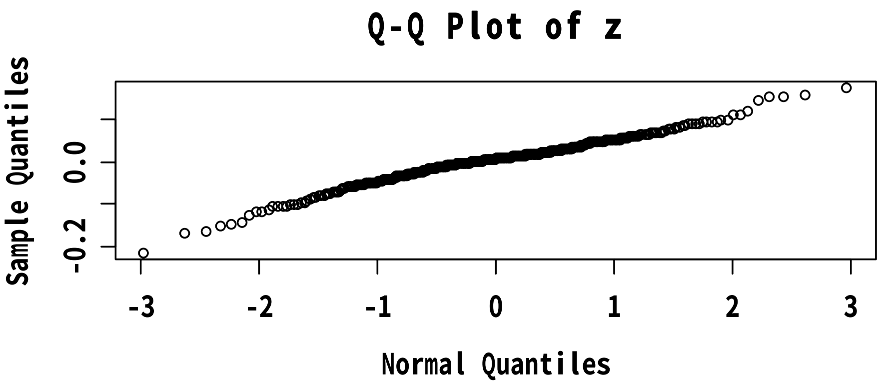
```
                aic<- result$n.likeli+(i+j+1)
                print(c(i,j,aic));
                if (aic < aicmin){
                        aicmin<- aic;
                        arorder<- i; maorder<- j
                }
        };
print(c(arorder, maorder, aicmin));
result<- garch(z, order=c(arorder,maorder), itmax=20000);
summary(result)
plot(result)
x11()
kurtosis(res, na.rm=T)
skewness(res, na.rm=T)
plotdata<- cbind(ret.mon[2:length(ret.mon)]^2,
                result$fitted.values[2:length(ret.mon),1]^2)
matplot(plotdata, type="l")
```

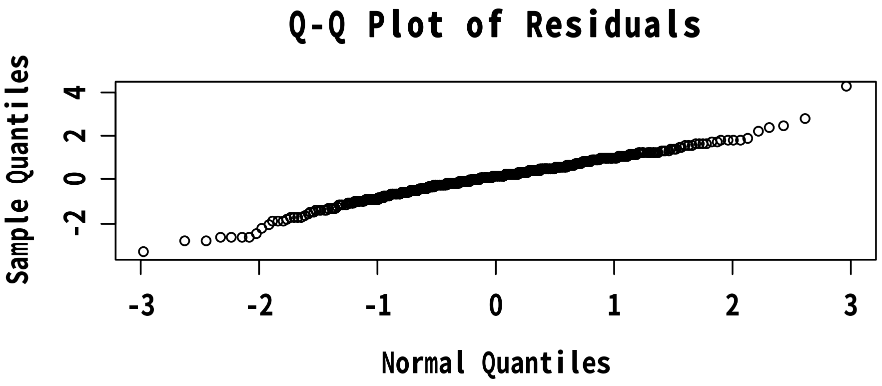


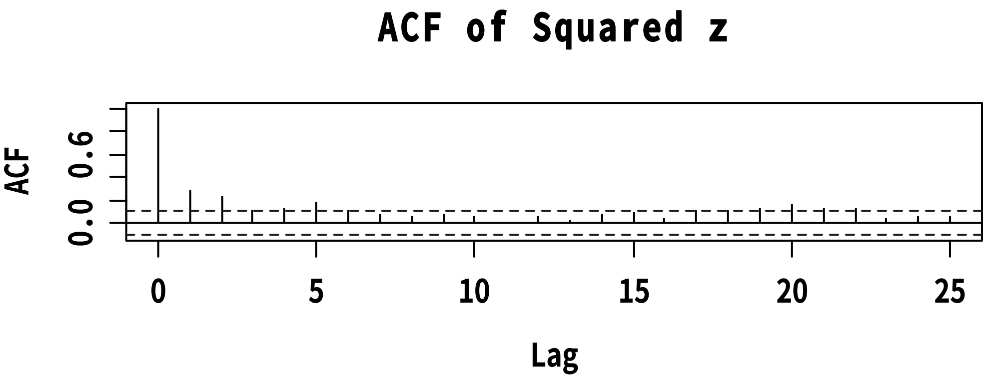


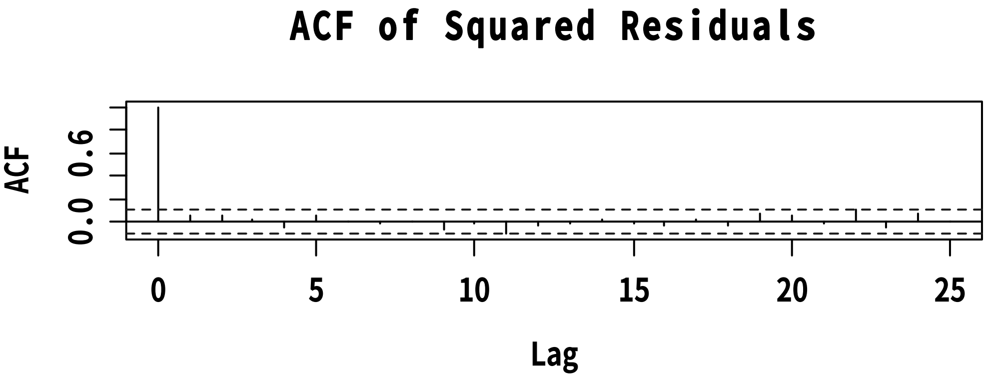

Histogram of z
Frequency
0
40
80
-0.2
-0.1
0.0
0.1
0.2
Series

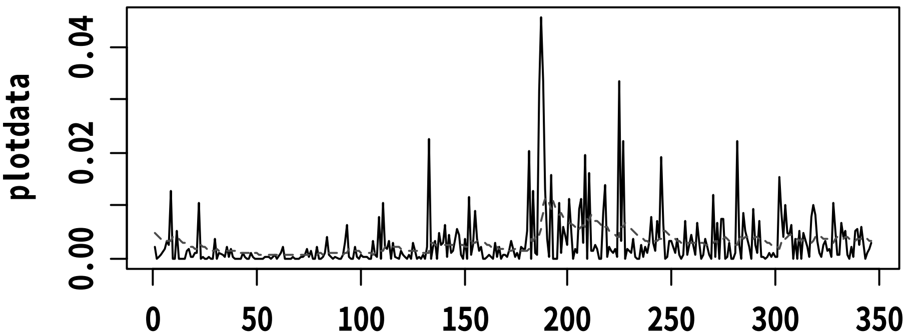

Histogram of Residuals
Frequency
0
40
80
140
-4
-2
0
2
4
Series


Q-Q Plot of z
Sample Quantiles
-0.2
0.0
-3
-2
-1
0
1
2
3
Normal Quantiles


Q-Q Plot of Residuals
Sample Quantiles
-2
0
2
4
-3
-2
-1
0
1
2
3
Normal Quantiles







（結果の出力）

```
> print(c(arorder, maorder, aicmin));
[1]     1.0000     1.0000 -861.1997
Call:
garch(x = z, order = c(arorder, maorder), itmax = 20000)
```

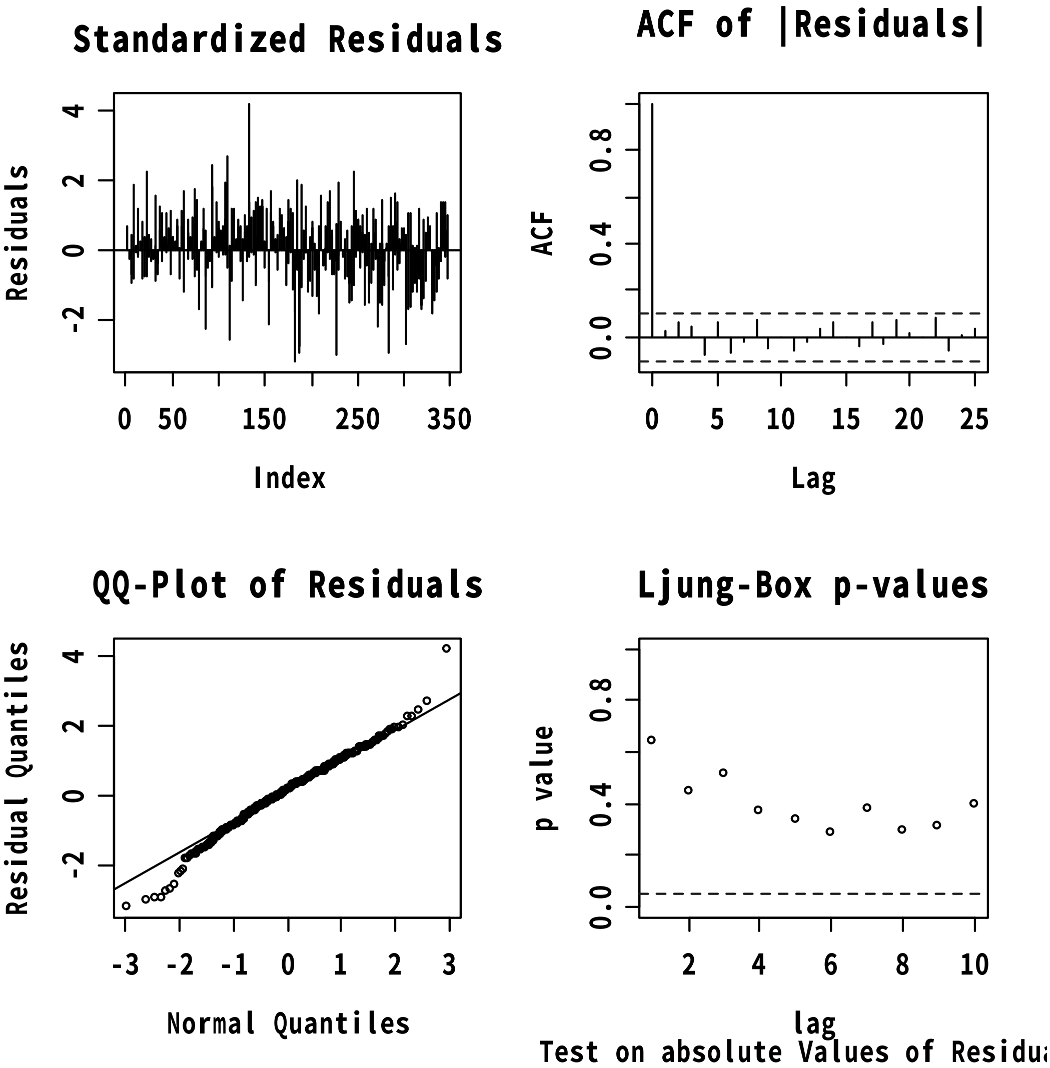
```
Model:
GARCH(1,1)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.37052 -0.55846  0.08133  0.60820  4.18912

Coefficient(s):
    Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
a0 3.565e-05   2.183e-05    1.633 0.102379
a1 8.930e-02   2.342e-02    3.813 0.000137 ***
b1 9.031e-01   2.356e-02   38.328  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Diagnostic Tests:
        Jarque Bera Test

data:  Residuals
X-squared = 25.685, df = 2, p-value = 2.646e-06



        Box-Ljung test

data:  Squared.Residuals
X-squared = 1.0163, df = 1, p-value = 0.3134
> kurtosis(res, na.rm=T)
[1] 1.228675
> skewness(res, na.rm=T)
[1] -0.4737514
```

```
rgarch<-garchFit(ret.mon, order=c(1,1); summary(rgarch)
```

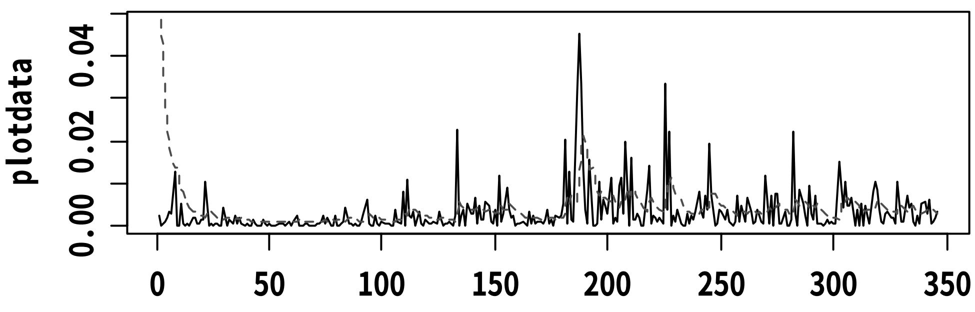
(結果)

```
Call:
garchFit(x = ret.mon, order = c(1, 1))
```

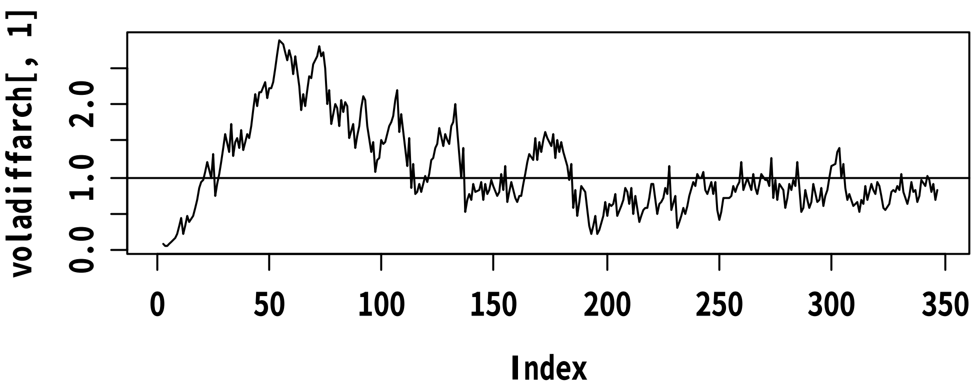
```
Model:
GARCH(1,1)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.1286 -0.4701  0.1473  0.6935  4.1204

Coefficient(s):
       Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
omega 3.046e-05   2.204e-05    1.382 0.167007
a1    8.948e-02   2.473e-02    3.619 0.000296 ***
b1    9.049e-01   2.358e-02   38.371  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Fit:
sigma^2 estimated as:        0.9733
AIC Criterion:               981.35

> opar<-par(mfrow=c(2,2))
> plot(rgarch)
```



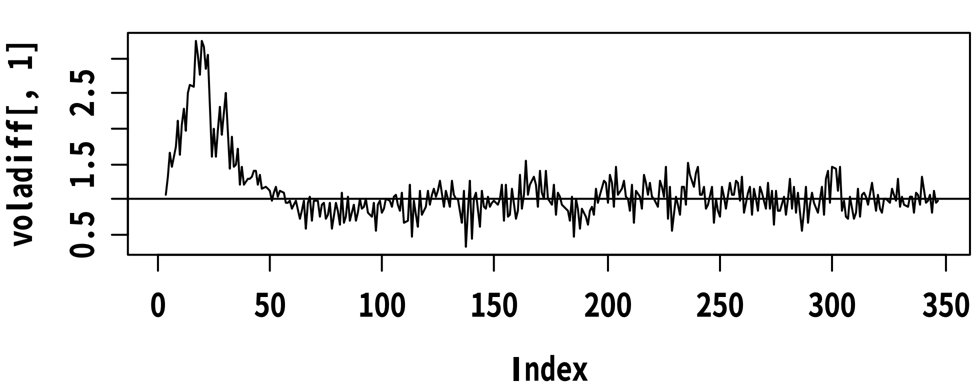

```
> res<-rgarch$res
> kurtosis(res, na.rm=T)
[1] 1.064439
> skewness(res, na.rm=T)
[1] -0.2720261
> plotdata<- cbind(ret.mon[2:length(ret.mon)]^2,
+                         result$fitted.values[2:length(ret.mon),1]^2)
> matplot(plotdata, type="l")
```



ARCH(2)と GARCH(2,1)との volatility の比率



GARCH(2,3)と GARCH(2,1)の volatility の比率



stdFit(rgarch$resid[3:length(rgarch$resid)])

$minimum
[1] 469.7923

$estimate
[1] 0.1146346 0.9647381 6.9252765

$gradient
[1]   4.973799e-05 -1.541594e-04   2.290062e-06

$code
[1] 1

$iterations
[1] 17

GARCH(2,1)の標準化ショックは自由度７程度の t 分布に近い

(なぜ GARCH モデルがかくも反映するのか)
Volatility Clustering をとらえる
端以外はほとんど正規分布となる.

＜IGARCH＞

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_s \sigma_{t-s}^2 \quad (\alpha_i > 0)$$

で推定された $\hat{\beta}_1 + \cdots + \hat{\beta}_s \approx 1$ でありがちである．上記の例でもそう．この場合 Volatility 自身がランダムウォークしているということ.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_s \sigma_{t-s}^2 \quad (\alpha_i > 0)$$

$$\beta_1 + \cdots + \beta_s \approx 1$$

商品，為替

＜GARCH-M＞

$$r_t = \mu + c\sigma_t^2 + a_t$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim \mathrm{IID}(0,1)$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_s \sigma_{t-s}^2 \quad (\alpha_i > 0)$$

ｃがリスクプレミアムをしめす
SP500 では GARCH(1,1)－M でｃが有意に正になるらしい.

<E-GARCH>
正の収益と負の収益に対する非対称効果

ショック： $g(\varepsilon_t) = \theta\varepsilon_t + \gamma(|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|))$

$$g(\varepsilon_t) = \begin{cases} (\theta+\gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|) & \varepsilon_t \geq 0 \\ (\theta-\gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|) & \varepsilon_t < 0 \end{cases}$$

一般には正規分布を仮定して $E(|\varepsilon_t|) = \sqrt{2/\pi}$ とする.

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim \mathrm{IID}(0,1)$$
$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \log(\sigma_{t-1}^2) + \cdots + \alpha_m \log(\sigma_{t-m}^2) + g(\varepsilon_{t-1}) + \beta_1 g(\varepsilon_{t-2}) + \cdots + \beta_s g(\varepsilon_{t-s-1})$$

＜Asymmetric Volatility Models: APARCH(p,q)＞

$$\begin{aligned} u_t|\Omega_{t-1} &= \sigma_t\xi_t, \quad \xi_t \sim \mathcal{N}(0,1)\ , \\ \sigma_t^\delta &= \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(|u_{t-i}| - \gamma_i u_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^\delta\ , \\ \omega > 0,\ \delta &\geq 0,\ -1 < \gamma_i < 1\ , \\ \alpha_i \geq 0,\ i &= 1,\ldots,p \quad \beta_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,q\ . \end{aligned}$$

- *Engle's ARCH(p)*:
  $\delta = 2$ and $\gamma_i = 0$; $\beta_j = 0$.
- *Bollerslev's GARCH(p,q)*:
  $\delta = 2$ and $\gamma_i = 0$.
- *Taylor/Schwert's GARCH(p,q)*:
  $\delta = 1$ and $\gamma_i = 0$.

Bollerslev の GARCH が普通の GARCH
月次収益率

$$\sigma_t^2 = 0.0001562 + 0.0949281\left(\left|u_{t-1}\right| - 0.4260921 u_{t-1}\right)^2 + 0.8430144\sigma_{t-1}^2$$

$u_{t-1} > 0$ なら，$\sigma_t^2 = 0.0001562 + 0.0949281\left(1 - 0.4260921\right)^2 u_{t-1}^2 + 0.8430144\sigma_{t-1}^2$

$u_{t-1} \leq 0$ なら，$\sigma_t^2 = 0.0001562 + 0.0949281\left(1 + 0.4260921\right)^2 u_{t-1}^2 + 0.8430144\sigma_{t-1}^2$

Leverage Effect

```
> raparch<- aparchFit(ret.mon,
+ order=list(alpha.lags=1, beta.lags=1, delta=2),
+ opt=list(gamma = T, delta = FALSE, disparm = FALSE),
+ doprint=FALSE)
> summary(raparch)

Call:
aparchFit(x = ret.mon, order = list(alpha.lags = 1, beta.lags = 1,
    delta = 2), opt = list(gamma = T, delta = FALSE, disparm = FALSE),
    doprint = FALSE)

Coefficient(s):
[1]  0.0001562  0.0949281  0.4260921  0.8430144  2.0000000  1.0000000
```

<SV>

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\log\left(\sigma_t^2\right) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_p \log\left(\sigma_{t-k}^2\right) + v_t$$

ε_t, v_t は独立