統計解析論試験解答例　２部用　　担当：中川　満　　持ち込み：全て可　時間：９０分

１．最小二乗法による残差の和が０になるのが保証されている場合○，保証されていない場合×をつけよ．

（ア）$Y = \beta X + \varepsilon$

（イ）$Y = \alpha + \varepsilon$

（ウ）$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$

（エ）$Y = \beta X + \gamma Z + \delta W + \varepsilon$

ただし，X, Z, W は定数ではない．また，ε は誤差項を表す．

（オ）決定係数が意味をもつのは○の場合か×の場合か答えよ．

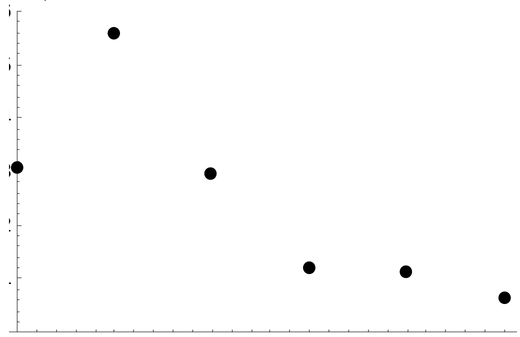
（解答例）

ア　×　イ　○　ウ　○　エ　×　オ　○

（解説）

定数項が回帰式に入っていれば，説明変数に１が入っている．この場合，残差と説明変数，１の積和は０になる．残差と１の積は残差そのものであるから，最小二乗残差の合計は０．決定係数が意味を持つのは，残差の合計が０の場合だけ．

２．ＸとＹは右図のような散布図を示し，決定係数は０．３６であった．相関係数は？（下図は厳密な散布図ではなく，傾向を示すものにすぎない．目盛りには意味はない）



（解答例）　－０．６

（解説）

相関係数の二乗が決定係数である．問題は，相関係数の符号であるが，それは右下がりの散布図から負と解る．

３．回帰式 $Y = \alpha + \beta X + \gamma Z + \varepsilon$ で，帰無仮説：$\alpha = \beta + \gamma$，対立仮説：$\alpha \neq \beta + \gamma$ を検定したい．そのために，回帰式の変形を行う．変形した回帰式を示し，どの説明変数に対する係数についてｔ値を見ればよいのかを示せ．

（解答例１）

まず定数項を $\alpha - \beta - \gamma$ に変形して，左辺が $\alpha + \beta X + \gamma Z + \varepsilon$ に等しくなるように足し引きして調整する．

$$Y = (\alpha - \beta - \gamma) + \beta + \gamma + \beta X + \gamma Z + \varepsilon$$

次に，βとγについて整理する．

$$Y = (\alpha - \beta - \gamma) + \beta(X + 1) + \gamma(Z + 1) + \varepsilon$$

できあがり．説明変数は，定数項，$X + 1$, $Z + 1$ の三つで定数項の係数のｔ値を見ればよい．

（解答例２）

まずＸの係数を $\alpha - \beta - \gamma$ に変形して，左辺が $\alpha + \beta X + \gamma Z + \varepsilon$ に等しくなるように足し引きして調整する．この場合，Ｘに－１を掛ける必要もある．このとき注意すべき点は，必ず係数を変

形した項を展開するともとの項 βX が出てくるようにすること．従って，$Y=\alpha+(\alpha-\beta-\gamma)X-\alpha X+2\beta X+\gamma X+\gamma Z+\varepsilon$ と変形してはいけない．その場合は，係数を変形した項を展開すると $-\beta X$ となってしまうから．

$$Y=\alpha+(\alpha-\beta-\gamma)(-X)+\alpha X-\gamma X+\gamma Z+\varepsilon$$

次に，αとγについて整理する．

$$Y=\alpha(X+1)+(\alpha-\beta-\gamma)(-X)+\gamma(Z-X)+\varepsilon$$

したがって，説明変数は，$X+1, -X, Z-X$ の三つになり，定数項は含まない．そして，検定には，$-X$ の係数に関するｔ値を使用する．

（解答例３）

まずＺの係数を $\alpha-\beta-\gamma$ に変形して，左辺が $\alpha+\beta X+\gamma Z+\varepsilon$ に等しくなるように足し引きして調整する．この場合，Ｚに－１を掛ける必要もある．このとき注意すべき点は，必ず係数を変形した項を展開するともとの項 γZ が出てくるようにすること．従って，$Y=\alpha+\beta X+(\alpha-\beta-\gamma)Z-\alpha Z+\beta Z+2\gamma Z+\varepsilon$ と変形してはいけない．その場合は，係数を変形した項を展開すると $-\gamma Z$ となってしまうから．

$$Y=\alpha+\beta X+(\alpha-\beta-\gamma)(-Z)+\alpha Z-\beta Z+\varepsilon$$

次に，αとβについて整理する．

$$Y=\alpha(Z+1)+\beta(X-Z)+(\alpha-\beta-\gamma)(-Z)+\varepsilon$$

したがって，説明変数は，$Z+1, X-Z, -Z$ の３つになり，定数項は含まない．そして，検定には，$-Z$ の係数に関するｔ値を使用する．

４．説明変数は単位１０億円で計測し，被説明変数は単位１００億円で計測し，回帰を行った．その結果，説明変数の係数の推定値は，－１．９，ｔ値は－２．８であった．もし，説明変数と被説明変数の単位を１０億円にそろえたとしたら，係数の推定値はいくつか？ｔ値はどうなるか？また，単位を１００億円にそろえたらどうなるか？

（解答例）

係数推定値	－１９．０	－１９．０
ｔ値	－２．８	－２．８

（解説）

元の単位での回帰式を $Y=\alpha+\beta X+\varepsilon$ とすると，被説明変数の数値は１０倍されるので $10Y=10\alpha+10\beta X+10\varepsilon$ である．したがって，係数推定値は１０倍，よって－１９．０，ｔ値は変わらず，－２．８．次に，説明変数の単位だけをいじれば，説明変数の数値は１／１０されるので，$Y=\alpha+(10\beta)(X/10)+\varepsilon$ となる．従って，係数推定値は１０倍になる．つまり，－１９．０，ｔ値は変わらない．

５．回帰式 $Y=\beta X+\varepsilon$ を最小二乗法で推定したとき，最小二乗推定量 $\hat{\beta}$, TSS, ESS, RSS, R^2 を計算せよ．ただし $\bar{x}=2$，$\bar{y}=1$，$\sum_{i=1}^{n} y_i^2=30$，$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i=10$，$\sum_{i=1}^{n} x_i^2=25$，$n=5$ である．

（解答例）

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}=0.4,\quad TSS=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n} y_i^2-n\bar{y}^2=30-5=25,$$

$$ESS = \hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \hat{\beta}^2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = 0.4^2 \times (25 - 5 \times 2^2) = 0.16 \times 5 = 0.8$$

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 30 - 0.4^2 \times 25 = 30 - 0.16 \times 25 = 26$$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{0.8}{25} = 0.032$$

６．回帰式$Y = \alpha + \beta X + \gamma Z + \delta W + \varepsilon$において$\beta$に関するｔ値が０．５であった, このとき, このＹとＸのＺ，Ｗの影響を取り除いた偏相関係数$r_{X,Y|Z,W}$を求めよ．ｎ＝１４とする．

（解答例）

$$r_{X,Y|Z,W}^2 = \frac{t^2}{n - K + t^2} = \frac{0.5^2}{14 - 4 + 0.5^2} = 0.0243902$$

ｔ値が正なので，βの推定値も正，従って，偏相関係数も正である．

よって，$r_{X,Y|Z,W} = \sqrt{0.0243902} = 0.156174$．

７．被説明変数Ｙに対して考え得る説明変数としては，Ｘ，Ｚ，Ｖ，Ｗの４つと定数が考えられる．説明変数を定数，Ｘ，Ｚ，Ｖ，Ｗの順に入れていくとして，以下のようなＲＳＳが得られた．自由度修正付き決定係数によってモデル選択をして，回帰式に含めるべき説明変数を決めよ．

ｎ＝１０，ＴＳＳ＝１００

説明変数	RSS
定数	40
定数，X	30
定数，X，Z	20
定数，X，Z，V	19
定数，X，Z，V，W	18

（解答例）

$\bar{R}^2 = 1 - \dfrac{RSS/(n-K)}{TSS/(n-1)}$によって自由度修正付き決定係数を計算すると，

説明変数	RSS	
定数	40	0.600
定数，X	30	0.663
定数，X，Z	20	0.743
定数，X，Z，V	19	0.715
定数，X，Z，V，W	18	0.676

より，となるので，$Y = \alpha + \beta X + \gamma Z + \varepsilon$が選択される．

８．被説明変数Ｙに対して考え得る説明変数としては，Ｘ，Ｚ，Ｖ，Ｗの４つと定数が考えられる．説明変数を定数，Ｘ，Ｚ，Ｖ，Ｗの順に入れていくとして，新たに追加した説明変

数に対するｔ値はそれぞれ，１．１，－０．４，０．９，－０．８であった，この場合，自由度修正付き決定係数によってモデル選択をして，回帰式に含めるべき説明変数を決めよ．

（解答例）$Y=\alpha+\beta X+\varepsilon$

（解説）

自由度修正付き決定係数が増えるのは新しく回帰に入れた説明変数のｔ値の絶対値が１より大きい場合である．したがって，Ｘまではｔ値の絶対値が１より大きいので，自由度修正付き決定係数が増加するが，Ｚをいれた時点で，自由度修正付き決定係数は減少し，それ以後減少し続ける．

９．以下のような回帰を行ったらｔ値が異常小さくなってしまった．原因を述べよ．

$Y=\alpha+\beta_1 D_1+\beta_2 D_2+\gamma X+\varepsilon$．ただし，

$$D_1=\begin{cases}1 & \text{その月が１～６月の場合}\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

$$D_2=\begin{cases}1 & \text{その月がが７～１２月の場合}\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

とする．

（解答例）多重共線性の発生

（解説）$D_1+D_2=1=$定数項の説明変数だから．

１０．以下は米国の１９１０年から１９８８年までのデータを元に実際に回帰分析を最小二乗法で行った時の，EXCEL の分析ツールの出力結果である．これをみて以下の問いに答えよ．

回帰モデル：

$$\text{実質株価収益率}=\alpha\, logrealgnp+\beta\, realinterestrate+\gamma\, unemployment\ rate+\delta\, gnpgrowth+\phi\, price+\eta+\text{誤差項}$$

ただし，logrealgdp：実質 GNP（log 変換後），realinterestrate:実質利子率，unemployment rate:失業率，gnpgrowth:実質ＧＮＰ成長率，price:物価水準

（EXCEL の出力［()内は教科書での表現]）

概要

回帰統計

重相関 R（$\sqrt{R^2}$）	XXXXXXXX
重決定 R2（R^2）	（ア）
補正 R2（自由度修正 R^2）	（イ）
標準誤差（$S=\sqrt{S^2}$）	（ウ）
観測数（ｎ）	79

分散分析表

	自由度	変動	分散	観測された分散比	有意 F
回帰	５	6724.472981 （回帰変動）	XXXXXX （回帰変動/自由度）	6.075323423 （全係数 F 検定）	9.32772E-05 （そのｐ値）
残差	（エ）	16160.013 （残差変動）	（オ） （$\frac{1}{n-K}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$）		
合計	（カ）	22884.48598 （総変動）			

	係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%	上限 95%
	（係数推定値）	（$S/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^*\right)^2}$）	（t 統計量）	（P 値）	（95%信頼区間）	
切片	－0.117317323	17.21847452	（キ）	0.995	（ク）	（ケ）
logrealgnp	－4.819619872	7.783365217	（コ）	0.538	－20.3	10.7
realinstrest	1.360349722	0.354749269	（サ）	0.000	0.653	2.07
unemployment	－0.724281459	0.362795972	（シ）	0.0496	－1.45	－0.00123
gnpgrowth	1.344659003	0.312243469	（ス）	0.000	0.722	1.97
price	6.483028379	7.782368899	（セ）	0.408	-9.03	22.0

（１）（ア）から（セ）までの欄に数値を与えよ.

（ア）0.29　（イ）0.25　（ウ）14.9　（エ）７３　（オ）221.4

（カ）７８　（キ）－0.01　（ク）－34.4　（ケ）34.2　（コ）-0.62

（サ）**3.8**　（シ）－2.0　（ス）4.3　（セ）0.83

（２）（ソ），（タ），（チ）について，検定統計量値，境界値，検定結果を示せ.

（ソ）対立仮説 $\beta > 0$，帰無仮説 $\beta = 0$ を有意水準５％で検定すると帰無仮説は棄却されるか？

検定統計量値：3.8　境界値：1.65　検定結果：棄却される

（タ）対立仮説 $\gamma < 0$，帰無仮説 $\gamma = 0$ を有意水準５％で検定すると帰無仮説は棄却されるか？

検定統計量値：－2.0　境界値：－1.65　検定結果：棄却される

（チ）対立仮説帰 $\phi \neq 0$，無仮説 $\phi = 0$ を有意水準１％で検定すると帰無仮説は棄却されるか？

検定統計量値：0.83　境界値：±2.58　検定結果：棄却されない