経済統計概論　６

仮説検定

１．仮説検定とは？
１．１　理論検証と仮説検定（１）

- 理論検証の過程（実験が出来ない場合）
  - 例
    - 理論
      - ケインズ型消費関数　C(消費)＝αY(所得)＋β
      - 仮説
        - » α（限界消費性向）は0と1の間　0＜α＜1
    - 仮説の検証
      - 実際の家計調査データを元に各家庭の（所得額，消費額）の組み合わせを知る＜ランダムサンプリング調査＞
      - αとβの値を推定
      - 0＜α＜1かの検証？＜ここが問題＞

2

１．１　理論検証と仮説検定（２）

- 推定値による仮説の検証
  - αの推定値が1.1なら仮説0＜α＜1は否定されたことになるのか？推定値が1.9ならどうか？
  - もし推定値が1.1で仮説0＜α＜1が否定されるなら，推定値が0.9の場合仮説0＜α＜1は肯定されたことになるのか？推定値が0.1ならどうなのか？
  - 疑問，疑問，疑問．．．．

3

１．２　仮説検定の必要性

- 推定値を元に仮説が肯定されるのか否定されるのかを判断する

仮説検定の役割

- 推定誤差を判断に入れることが必要

4

１．３　推定値の誤差と仮説検証（１）

- 仮説：母集団の平均が1以下
- 仮説を満たしている母集団からの標本平均で判断できるか？

	標本1	標本2	標本3	標本4	標本5	標本6	標本7	標本8	標本9	標本10
X1	0.448	0.904	1.209	1.659	−0.358	2.662	1.130	1.831	0.582	1.898
X2	1.445	1.896	0.072	1.440	0.903	−2.061	0.214	0.041	3.515	0.858
X3	−1.539	0.699	1.230	−0.477	2.603	−0.589	0.724	1.195	1.578	0.842
X4	1.594	1.853	1.214	2.657	0.383	1.003	−1.003	3.021	0.265	1.575
X5	−0.667	1.890	0.495	−0.790	1.902	1.105	−1.172	1.525	1.298	1.653
X6	0.685	−0.118	0.895	1.792	−0.362	0.117	1.391	0.739	1.047	1.265
X7	0.269	−0.440	−0.009	2.698	0.629	1.653	0.645	0.159	0.554	1.459
X8	0.384	1.216	0.457	1.337	−0.217	−1.329	0.653	1.023	3.062	0.108
X9	2.503	0.120	0.589	2.047	0.448	1.782	1.075	0.316	1.462	1.097
X10	0.564	0.009	0.648	0.383	2.577	2.640	1.538	1.073	1.527	1.854
標本平均	0.568	0.803	0.680	1.275	0.851	0.698	0.519	1.092	1.489	1.261

5

１．３　推定値の誤差と仮説検証（２）

- 標本4，9の場合
  - 標本平均のみを見ると仮説を否定するのが普通
  - しかし，実際は母集団平均は1だから1以下
  - 標本平均だけみて判断してはならない
  - 推定値（この場合は標本平均）の誤差も考慮に入れる必要がある
- 仮説：母集団の平均が1を超える
  - 実際は母集団平均は1だから仮説は間違っている
  - しかし，標本4，9の場合は正しいように見えてしまう

6

２．仮説検定の考え方
２．１肯定したい仮説・否定したい仮説

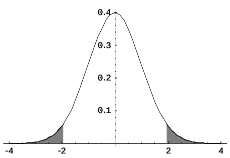
- データを元に肯定的に実証したい仮説
  - ケインズ型消費関数では「0＜α＜1」
  - 対立仮説（ H_1 ）と呼ぶ
- 「この仮説の否定」を「否定」することで，仮説を実証する
  - この否定されるべき仮説を帰無仮説（ H_0 ）と呼ぶ
  - ケインズ型消費関数では「α≧0または1≦α」
- 背理法に似た考え方

２．２　帰無仮説の棄却・受容（1）

- 検定の流れ
  - 帰無仮説を「否定」する＝帰無仮説を棄却
  - 棄却できれば，対立仮説を採択
    ＝対立仮説を「肯定」
  - 棄却できなければ，帰無仮説を受容
    ＝帰無仮説を「肯定」
- では棄却・受容の区別は？

２．２　帰無仮説の棄却・受容（2）

- 棄却の考え方
  - 推定値が＜帰無仮説が正しいとした場合に＞「確率論的に考えて起こりづらい値」になっていると棄却
    - 帰無仮説が正しいとした場合の推定値の分布で判断
    - 「確率論的に考えて起こりづらい値」＝確率密度関数値が低い値
    - 右図の灰色の部分＝棄却



２．３　棄却域と有意水準，境界値

- 灰色の範囲を棄却域と呼ぶ
- 棄却域の決め方
  - 灰色の部分の総面積を最初に決める
    - 例えば5%＝0．05．帰無仮説が正しい場合に帰無仮説を棄却する確率
- この面積を有意水準と呼ぶ
  - 5%，1%，10%などの順でよく使われる．
- 棄却域との境目を境界値，臨界値と呼ぶ

２．４　検定統計量

- 実際は推定値の分布は標本平均で見たように一定ではない
  - 標本平均の場合，標本数，母分散，母平均によって変動する．
    $$\bar{X} \longrightarrow (\sigma/\sqrt{n})Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$
- それらに影響されない分布を持つ形に変形
  - 帰無仮説でのパラメータの値を代入
    $$(\sqrt{n}/\hat{\sigma})(\bar{X} - \mu_{\text{帰無仮説}}) \cong Z$$
  - これを検定統計量という．これの分布を元に判断

２．５　まとめ

- 検定統計量の式に，帰無仮説の値を全部代入する．
  - 帰無仮説：$\mu=1$ でn=10なら，$(\sqrt{10}/\hat{\sigma})(\bar{X}-1)$
- 推定値を代入
  - $\bar{X}=1.31,\ \hat{\sigma}=1.02$ なら$(\sqrt{10}/1.02)(1.31-1)=0.98$
- この推定値が棄却域に入っているかを判断
  - 有意水準5%とすれば境界値は1.96だからその内側なので帰無仮説は受容される
  - $P(Z \le 0.98) = 0.837$ なのでもし統計量値を境界値にしたら棄却域の確率は0.326，有意水準を上回るので受容
    $$P(Z < -0.98 \text{または} Z > 0.98) = 2P(Z > 0.98)$$
    $$= 2\{1 - P(Z \le 0.98)\} = 0.326$$

２．６　P値

- P値
  - 統計量値を境界値にしたときの有意水準
  - これが実際の有意水準より大きければ，帰無仮説は受容
  - 小さければ帰無仮説は棄却，対立仮説を採択

13

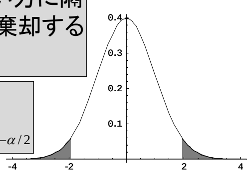
３．母平均に関する検定
３．１　標本数が大きい場合

- 帰無仮説　$\mu = \mu_0$
- 対立仮説（後で論ずる）
- 検定統計量とその分布
  $\left(\sqrt{n}/\hat{\sigma}\right)\left(\overline{X} - \mu_0\right) \cong Z \sim N(0,1)$
  - 前シリーズの標本平均の分布による

14

３．１．１　両側検定（対立仮説≠型）

対立仮説が≠型の時：$H_1 : \mu \neq \mu_0$
  - 推定値が仮説の値に対して大きい方に隔たっていても，小さい方に隔たっていても，帰無仮説を棄却する
  - 棄却域は両側



- 境界値
  - 有意水準をαとすると，$\pm z_{1-\alpha/2}$

$P\left(Z \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha/2$

$P\left(Z < -z_{1-\alpha/2}\text{または}Z > z_{1-\alpha/2}\right) = 2P\left(Z > z_{1-\alpha/2}\right)$

$= 2\left(1 - P\left(Z \leq z_{1-\alpha/2}\right)\right) = \alpha$

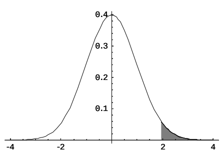
15

３．１．２　片側検定（対立仮説＞型）

- 対立仮説が＞型のとき：$H_1 : \mu > \mu_0$
  - 推定値 $\overline{X}$ が仮説の値に対して大きい方に隔たっていた場合だけ，帰無仮説を棄却する．

$\left(\sqrt{n}/\hat{\sigma}\right)\left(\overline{X} - \mu_0\right)$

  - 統計量が正の側が棄却域
  - 棄却域は片側

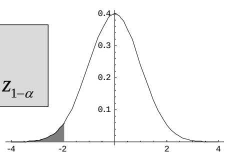


- 境界値
  - 有意水準をαとすると，$z_{1-\alpha}$

16

３．１．２　片側検定（対立仮説＜型）

- 対立仮説が＜型のとき：$H_1 : \mu < \mu_0$
  - 推定値 $\overline{X}$ が仮説の値に対して小さい方に隔たっていた場合だけ，帰無仮説を棄却する
  - 統計量が負の側が棄却域
  - 棄却域は片側



- 境界値
  - 有意水準をαとすると，$-z_{1-\alpha}$

17

３．２　正規分布の標本の場合

- 帰無仮説　$\mu = \mu_0$
- 対立仮説（言いたいことによって両側，片側）
- 検定統計量とその分布

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X} - \mu_0\right)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}} \sim t(n-1)$$

  - 前シリーズの標本平均の分布による

18

4．検定の誤り

- 分類

こちらは我々には解らない		検定結果	
		帰無仮説を受容	帰無仮説を棄却
帰無仮説	正しい	○	第１種の誤り
	間違い	第２種の誤り	○

- 誤りの確率

		検定結果	
		帰無仮説を受容	帰無仮説を棄却
帰無仮説	正しい	１－有意水準	有意水準
	間違い	１－検出力	検出力

19

5．なぜ有意水準は小さいのか？

- 仮説として「あるメールがジャンクメールである」というのを考えよう＝これが対立仮説
- 帰無仮説は「普通のメールである」ということになる.
- 第１種の誤りは,「普通のメールなのにジャンクとしてしまう」ことで，これは出来るだけ避けたい.
- 従って，第１種の誤りの確率を小さくする

20

6．第１種と第２種の誤り確率のトレードオフ

- 通常有意水準（第１種の誤り確率）を下げると検出力も下がる
  - ジャンクメールの例で考える
  - 有意水準を下げると,「普通のメールなのにジャンクとしてしまう」確率を下げることになる．つまり,ジャンク判定を甘くすることになる.
  - ジャンクメールが「普通のメール」と判定されやすくなる
  - 第２種の誤りが増える．検出力も減る

21

7．平均差の検定

- あるグループの母平均 μ_A と別のグループの母平均 μ_B に差があるかどうかを検定
  - 標本同士には対応関係はない
- 帰無仮説：$\mu_A = \mu_B$
- 対立仮説
  - 両側検定：$\mu_A \neq \mu_B$
    - 棄却域：統計量値が正負
  - 片側検定：$\mu_A > \mu_B$ または $\mu_A < \mu_B$
    - 棄却域：統計量値が正，または，負

22

対応関係がある場合の平均差の検定

- 対応がある物同士で差を取りその平均の検定に持ち込む
  - A集団の標本：X_i，B集団の標本：Y_i

$$X_i - Y_i$$

  - この母平均が0より大きいか？（0と異なるか？）

23

7．１　標本数が大きい場合
7．１．１　両グループが等分散の場合

- 統計量とその分布

$$\frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\hat{\sigma}\sqrt{1/n_A + 1/n_B}} \cong Z \sim N(0,1)$$

$\overline{X}_A : A$集団の標本平均，$\overline{X}_B : B$集団の標本平均

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{A集団}\left(X_i - \overline{X}_A\right)^2 + \sum_{B集団}\left(X_i - \overline{X}_B\right)^2}{n}$$

$n = A$集団の標本数$+ B$集団の標本数$= n_A + n_B$

24

７．１．１　両グループが異分散の場合

• 標本平均差の分散

$V\left(\bar{X}_A - \bar{X}_B\right) = V\left(\bar{X}_A\right) + V\left(\bar{X}_B\right)$

$V\left(\bar{X}_A\right) = \sigma_A^2 / n_A,\ V\left(\bar{X}_B\right) = \sigma_B^2 / n_B$

• 統計量とその分布

$$\frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{\hat{\sigma}_A^2 / n_A + \hat{\sigma}_B^2 / n_B}} \cong Z \sim N(0,1)$$

$n_A = A$集団の標本数，$n_B = B$集団の標本数

$$\hat{\sigma}_A^2 = \sum_{A集団}\left(X_i - \bar{X}_A\right)^2 \Big/ n_A,\ \hat{\sigma}_B^2 = \sum_{B集団}\left(X_i - \bar{X}_B\right)^2 \Big/ n_B$$

25

７．１．３　等分散か異分散か？

• 等分散の検定
  – 帰無仮説：$\sigma_A^2 = \sigma_B^2$
  – 対立仮説：$\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$
  – 統計量：（こっそり母集団は正規分布と仮定）

$$\frac{\dfrac{1}{n_A - 1}\sum_{A集団}^{n}\left(X_i - \bar{X}_A\right)^2}{\dfrac{1}{n_B - 1}\sum_{B集団}^{n}\left(X_i - \bar{X}_B\right)^2} \cong \frac{\dfrac{\chi^2(n_A - 1)}{n_A - 1}}{\dfrac{\chi^2(n_B - 1)}{n_B - 1}} = F(n_A - 1, n_B - 1)$$

  – 両側検定を用いて，帰無仮説が棄却されれば，異分散の場合の検定，受容されれば等分散の検定

26

F分布の性質

• $F(n_A - 1, n_B - 1) = \dfrac{\dfrac{\chi^2(n_A - 1)}{n_A - 1}}{\dfrac{\chi^2(n_B - 1)}{n_B - 1}}$

$$= 1 \Bigg/ \frac{\dfrac{\chi^2(n_B - 1)}{n_B - 1}}{\dfrac{\chi^2(n_A - 1)}{n_A - 1}}$$

$$= 1 / F(n_B - 1, n_A - 1)$$

27

F分布の性質

• $F(n_A - 1, n_B - 1)$に従う確率変数を$F_{n_A - 1, n_B - 1}$ としたとき，その100α%点 $f_{n_A - 1, n_B - 1, \alpha}$を

$$P\left(F_{n_A - 1, n_B - 1} \le f_{n_A - 1, n_B - 1, \alpha}\right) = \alpha$$

となる $f_{n_A - 1, n_B - 1, \alpha}$ とすれば，

$$\begin{aligned} P\left(F_{n_A - 1, n_B - 1} \le f_{n_A - 1, n_B - 1, \alpha}\right) &= P\left(1 / F_{n_A - 1, n_B - 1} \ge 1 / f_{n_A - 1, n_B - 1, \alpha}\right) \\ &= P\left(F_{n_B - 1, n_A - 1} \ge 1 / f_{n_A - 1, n_B - 1, \alpha}\right) \\ &= 1 - P\left(F_{n_B - 1, n_A - 1} \le 1 / f_{n_A - 1, n_B - 1, \alpha}\right) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

より $P\left(F_{n_B - 1, n_A - 1} \le 1 / f_{n_A - 1, n_B - 1, \alpha}\right) = 1 - \alpha$

28

応用

• $P\left(F_{n_B - 1, n_A - 1} \le 1 / f_{n_A - 1, n_B - 1, \alpha}\right) = 1 - \alpha$より $F(n_A - 1, n_B - 1)$ の2．5%点が解る．
  – n_A, n_B を入れ替えると，

$$P\left(F_{n_A - 1, n_B - 1} \le 1 / f_{n_B - 1, n_A - 1, \alpha}\right) = 1 - \alpha$$

  – $\alpha = 0.975$とすると，

$$P\left(F_{n_A - 1, n_B - 1} \le 1 / f_{n_B - 1, n_A - 1, 0.975}\right) = 1 - 0.975 = 0.025$$

  – つまり，$F(n_B - 1, n_A - 1)$ の97．5%点の逆数

29

７．２　母集団が正規分布の場合（等分散の場合のみ）

• 統計量

$$\frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{S\sqrt{1/n_A + 1/n_B}} \sim t(n_A + n_B - 2)$$

$$S^2 = \frac{1}{n_A + n_B - 2}\left\{\sum_{A集団}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 + \sum_{B集団}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right\}$$

30

７．３　比率差の検定（１）

- 帰無仮説は「二つの比率が等しい」
  - 第１の比率を p_1，第2の比率を p_2 とする
  - 帰無仮説: $p_1 = p_2$
  - それぞれの標本数を n_1, n_2 とする.
- $\dfrac{\sqrt{n_1}\left(m_1/n_1 - p_1\right)}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}$, $\dfrac{\sqrt{n_2}\left(m_2/n_2 - p_2\right)}{\sqrt{p_2(1-p_2)}}$ はともに標準正規分布である.
  - $Z_1 = \dfrac{\sqrt{n_1}\left(m_1/n_1 - p_1\right)}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}, Z_2 = \dfrac{\sqrt{n_2}\left(m_2/n_2 - p_2\right)}{\sqrt{p_2(1-p_2)}}$ とおく

31

７．３　比率差の検定（２）

- 変形

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2} = (p_1 - p_2) + \left(\frac{\sqrt{p_1(1-p_1)}}{\sqrt{n_1}} Z_1 - \frac{\sqrt{p_2(1-p_2)}}{\sqrt{n_2}} Z_2 \right)$$

$$E\left[\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}\right]$$

$$= (p_1 - p_2) + \left(\frac{\sqrt{p_1(1-p_1)}}{\sqrt{n_1}} E[Z_1] - \frac{\sqrt{p_2(1-p_2)}}{\sqrt{n_2}} E[Z_2] \right)$$

$$= p_1 - p_2$$

32

７．３　比率差の検定（３）

- 変形（続き）

$$V\left[\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}\right] = \left(\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} V[Z_1] + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2} V[Z_2] \right)$$

$$= \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$$

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2} \cong N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2} \right)$$

33

７．３　比率差の検定（４）

- 帰無仮説の下では

$$\left(\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2} \right) \Bigg/ \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \cong N(0,1)$$

- p_1, p_2の推定値はそれぞれ $m_1/n_1, m_2/n_2$
- 統計量は

$$\left(\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2} \right) \Bigg/ \sqrt{\frac{m_1/n_1(1-m_1/n_1)}{n_1} + \frac{m_2/n_2(1-m_2/n_2)}{n_2}}$$

- 帰無仮説での分布は標準正規分布で近似

34