統計解析論特殊講義　模擬試験（１）

１． $n=10,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 10,\quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 10,\quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 40,\quad \bar{x}=0,\quad \bar{y}=1$ であった.

（ア）回帰式 $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ の最小二乗推定値 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$，残差二乗和 $\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$，ＴＳＳ，ＥＳＳ，

R^2，$\overline{R}^2$ を求めよ.

（イ） $H_0 : \beta = 0,\quad H_1 : \beta \neq 0$ に対するｔ統計量値を求め有意水準５%で検定せよ.

（ウ） $H_0 : \beta = 1,\quad H_1 : \beta < 1$ に対するｔ統計量値を求め有意水準５%で検定せよ.

（エ） $H_0 : \alpha = \beta = 0$ に対するＦ統計量値を求め有意水準５%で検定せよ.

（オ） βの９５%信頼区間を求めよ.

（カ） $x=2$ の場合，ｙの予測値はいくらか．また，予測値の９５%信頼区間を求めよ.（予測誤差の分散を使い，後はパラメータ値の区間推定と同様に行う.）

２． $n=7,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 4,\quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 8,\quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 43,\quad \bar{x}=0,\quad \bar{y}=1$ とする．回帰式 $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ において $H_0 : \alpha = \beta,\quad H_1 : \alpha < \beta$ を有意水準５%で検定せよ.

３． $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ における $H_0 : \beta = 0$ に対する検定のｔ値をｔと置くとき，$t^2 = \dfrac{TSS - RSS}{RSS/(n-2)}$ の関係がある．これを元に決定係数 R^2 を t^2 で表し，決定係数 R^2 の値を使って $H_0 : \beta = 0,\quad H_1 : \beta \neq 0$ の検定を有意水準５%で行うための境界値をｎ＝３～１０について計算せよ.

４．回帰式 $y_i = \alpha + \beta x_i + \gamma z_i + \delta v_i + \varepsilon_i$ において，$H_0 : \begin{cases} \alpha + \beta = \delta + 2 \\ 2\alpha + 4\beta = 2\gamma + 2 \end{cases}$ を検定したい．帰無モデル回帰式はどうなるか？また，このときのＦ統計量を対立モデル回帰式のＲＳＳを RSS_a，帰無モデル回帰式のＲＳＳを RSS_0，標本数ｎを用いて表せ.

５． $\underline{n=10}$，$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 10,\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 10,\ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 40,\ \sum_{i=1}^{n} z_i y_i = 18,\ \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = 18,\ \bar{x}=0,\quad \bar{y}=1,$ $\bar{z}=0$ とし，さらに，$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 0$ とする．このとき，回帰式 $y_i = \alpha + \beta x_i + \gamma z_i + \varepsilon_i$ において，最小二乗推定値 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$，残差二乗和 $\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$，ＴＳＳ，ＥＳＳ，$R^2$，$\overline{R}^2$ を求めよ.（ｘとｚはどのような関係か？それを利用できないか？）

６．回帰式 $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ において $\hat{\beta}$ の分散について，以下のそれぞれの値が変わることによって受ける影響について答えよ．X の標本分散が大きくなると（ア，大きくなる，小さくなる，同じ）．また，標本数ｎが大きくなると，（イ，大きくなる，小さくなる，同じ）．誤差項の分散が大きくなると，（ウ，大きくなる，小さくなる，同じ）．真の値βが大きくなると，（エ，大きくなる，小さくなる，同じ）．Ｘの単位を変換して１０００分の１の数値にした場合, 傾きの推定値の分散は,（オ, 大きくなる, 小さくなる, 同じ）．Ｙの単位を変換して１０００分の１の数値にした場合, 傾きの推定値の分散は,（カ，大きくなる，小さくなる，同じ）．Ｙの単位を変換して１０００分の１の数値にした場合，傾きの推定値の分散は，（キ，大きくなる，小さくなる，同じ）．Ｘの単位を変換して１０００分の１の数値にし，かつ，Ｙの単位も変換して１０００分の１の数値にした場合，傾きの推定値の分散は，（ク，大きくなる，小さくなる，同じ）.

７．新たに説明変数を付け加えた際の説明力の増加＝決定係数の増加を新たな説明変数と被説明変数の偏相関係数 r とその説明変数を入れない回帰における R^2 を用いて表せ.

８．最小二乗推定量はＢＬＵＥ（ブルーと読む）＝最小分散線形不偏推定量である．この事実を用いて，母集団の平均の推定量としては標本平均が最小分散線形不偏推定量であることを示せ.

９．母集団の平均の推定量として標本平均が一致推定量であることを示せ.

１０． $y_i = \mu + \varepsilon_i$ ， $E[\varepsilon_i] = 0$ ， $V[\varepsilon_i] = \sigma^2$ ， ε_i は ｉ に関して独立とする．$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ において． $E[S^2] = \sigma^2$ であることを示せ.