教科書１章に関する練習問題（解答）

１．教科書ｐ．３５の７，８，９

（解）　教科書の解答参照

２．元の回帰式Ｙ＝α＋βＸのαとβの最小二乗推定量を$\hat{\alpha},\hat{\beta}$．新たに被説明変数をＹ－５Ｘ＋１，説明変数を２Ｘ＋１（と１）とした回帰式（Ｙ－５Ｘ＋１）＝γ＋δ（２Ｘ＋１）のγとδの最小二乗推定量を求めよ．

（解１）　$Y=\alpha+\beta X$ を変形していく．まず被説明変数を合わせる．そのためには，両辺に－５Ｘ＋１を足す．$Y-5X+1=\alpha+\beta X-5X+1$．右辺の共通項をくくる．$Y-5X+1=\alpha+(\beta-5)X+1$．今度は説明変数を合わせる．まず 2X を説明変数にするよう変形する．$Y-5X+1=\alpha+\{(\beta-5)/2\}2X+1$．次に，$\{(\beta-5)/2\}(2X+1)$が右辺にくるように変形する．
$Y-5X+1=\alpha+\{(\beta-5)/2\}(2X+1)-\{(\beta-5)/2\}+1$．この右辺を$2X+1$について整理すると，$Y-5X+1=\{\alpha-(\beta-5)/2+1\}+\{(\beta-5)/2\}(2X+1)$となるので，$\hat{\gamma}=\hat{\alpha}-\hat{\beta}/2+7/2,\quad \delta=(\hat{\beta}-5)/2$となる．

（解２）　単回帰に関する最小二乗法の性質を用い，

$$\hat{\delta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\{(2x_i+1)-(2\bar{x}+1)\}\{(y_i-5x_i+1)-(\bar{y}-5\bar{x}+1)\}}{\sum_{i=1}^{n}\{(2x_i+1)-(2\bar{x}+1)\}^2},$$

$$\hat{\gamma}=\bar{y}-5\bar{x}+1-\hat{\delta}(2\bar{x}+1)$$

を得る．これらの式を，

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2},\quad \hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}$$

を用いて変形しても良い．

３．元の回帰式Ｙ＝α＋βＸのαとβの最小二乗推定量を$\hat{\alpha},\hat{\beta}$．新たに被説明変数を２Ｙ，説明変数を２Ｘ＋１（と１）とした回帰式２Ｙ＝γ＋δ（２Ｘ＋１）の最小二乗法による残差は元の回帰の最小二乗法による回帰残差とどのような関係にあるか？まず，Ｙ＝α＋βＸ＋誤差（残差）の式を変換して予測し，実際にそうなっていることを，

最小二乗推定量の式から導出せよ．

（解）　Y＝α＋βX＋誤差を左辺が目的に回帰式に合う様変形する．まず，両辺を２倍すると２Y＝２α＋２βX＋２誤差をえる．次に，説明変数を合わせる．

２Y＝２α＋β（２X＋１）－β＋２誤差.

この式を整理すると，２Y＝（２α－β）＋β（２X＋１）＋２誤差となる．従って，残差はY＝α＋βX＋誤差の回帰の２倍になっていると考えられる．

それを確かめる．２Y＝（２α－β）＋β（２X＋１）＋２誤差の式から，

$\hat{\gamma} = 2\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ ，$\hat{\delta} = \beta$ であることが解る．従って，残差は，

$2y_i - \left(2\hat{\alpha} - \hat{\beta}\right) - \hat{\beta}\left(2x_i + 1\right) = 2\left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i\right)$となり，やはり元の回帰式の残差の２倍である．

４．$Y = \beta X +$ 誤差 を最小二乗法で推定するとき，βの最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ を $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ と $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ で表すために，$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta x_i\right)^2$ のβに関する最小値をもとめ，最小値のときのβをもとめよ．

（解）　$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \beta^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ より，これをβに関して微分して，最小化の条件として $-2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2\beta\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$ を得る．ここから，

$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ を得る．

５．教科書 p.8,9 を参考にして，$Y = \gamma +$ 誤差 を最小二乗法で推定したときのγの最小二乗推定量を求めよ．それと，スライドの最終ページの結果をもとに，$Y = \alpha + \beta X$ のαの最小二乗推定量が $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x}$ で与えられることを導け．

（解）　$S = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \gamma\right)^2 = \gamma^2\sum_{i=1}^{n} 1 - 2\gamma\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = n\gamma^2 - 2\gamma\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ より，

これをγに関して微分して，最小化の条件として $-2n\gamma + 2\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$ を得る．こ

ここから，$\hat{\gamma}=\sum_{i=1}^{n} y_i \Big/ n=\bar{y}$ を得る．$Y=\alpha+\beta X$ を変形すると，

$Y=\alpha+\beta X=\alpha+\left(\beta-\hat{\beta}\right)X+\hat{\beta}X$ より，$\hat{\beta}X$ を左辺に移項して，

$Y-\hat{\beta}X=\alpha+\left(\beta-\hat{\beta}\right)X$ を得る．最小二乗推定を行えば，$\left(\beta-\hat{\beta}\right)X=0$ となるので，最小二乗推定をする限りでは，回帰式は $Y-\hat{\beta}X=\alpha(+\text{誤差})$ となる．従って，$\hat{\alpha}=\text{説明変数の標本平均}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}$ である．

6．$Y-\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}X=\gamma\left(1-\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}X\right)+\delta X$ の回帰を最小二乗法で推定する．γ，δの最小二乗推定量の値を回帰式Y＝α＋βＸにおけるα，βの最小推定量 $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ で表せ．（回帰式の変換を使う）また，このときの残差はもとの回帰式Y＝α＋βＸにおける残差とどのような関係にあるか？

（解）　$Y=\alpha+\beta X$ を変形する．まず両辺から $\sum_{i=1}^{n} y_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ を引くと，

$$Y-\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}X=\alpha+\left(\beta-\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)X$$

を得る．次に，説明変数を合わせていくと，

$$\begin{aligned}Y-\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}X&=\alpha\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}X\right)+\alpha\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}X+\left(\beta-\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)X\\&=\alpha\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}X\right)+\left(\beta+\alpha\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}-\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)X\end{aligned}$$

となる．

$$\left(\beta-\alpha\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}-\frac{\sum_{i=1}^{n}y_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta x_i^2+\sum_{i=1}^{n}\alpha x_i-\sum_{i=1}^{n}y_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\beta x_i+\alpha-y_i)x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

であるが，最小次号推定する限りでは，$(\beta x_i+\alpha-y_i)$は$-\hat{u}_i$となるので，分子は $\sum_{i=1}^{n}(\beta x_i+\alpha-y_i)x_i=-\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_ix_i=0$ となる．従って，$Y-\frac{\sum_{i=1}^{n}y_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}X=\alpha\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}X\right)+0X$ となる．よって，$\hat{\gamma}=\hat{\alpha}$，　$\hat{\delta}=0$．残差は，このような変形を元にしているので，残差は同じになる．