私的情報のあるゲームとベイジアン・ナッシュ均衡

- ゲームが始まる時に私的情報のあるものを不完備情報（Incomplete Information）ゲームと言う。（私的情報がない→ Complete）

- 例　中古車の入札
  - 買い手 $i = 1, 2$ $\begin{cases} 1 \text{ の留保価格} \quad v_1 = 60 \text{ 万円} \\ 2 \text{ の留保価格} \quad v_2 = 80 \text{ 万円} \end{cases}$

    ∗ v_i は i にしか分からない（私的情報）
  - 同時に入札価格 b_i を提出→高い方がその価格で入手

  これをゲーム論の枠組みに入れて考える。（これだけではゲームを作れない。）

  - Step 1　私的情報 (v_1, v_2) は一定の確率分布 $f(v_1, v_2)$ から出ており、各人はこれを「よく知っている」（f が衆知の事実になっている）とする。（Common Prior の仮定）

- Step 2　各人の戦略は、私的情報から行動への関数

$$b_i = s_i(v_i)$$

と考え、
- Step 3　$\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ の下での期待利得を f で計算し（$\Rightarrow \boldsymbol{\pi}_i(\mathbf{s})$）ナッシュ均衡 $\mathbf{s}^*$ を求める。（ベイジアン・ナッシュ均衡）

- Step 1（分布に共通の理解がある）は強い仮定だが、仮定しないと

  v_1 に対する 2 の予想

  v_1 に対する 2 の予想に対する 1 の予想

  v_1 に対する 2 の予想に対する 1 の予想に対する 2 の予想

  $\vdots$

  を全て考える必要が出て来る→原理的には可能（Mertens-Zamir のモデル）だが応用では使いにくい
  - この例では（世間の分布とすれば）それほどおかしくない

Harsanyi の定式化

- 私的情報のあるゲームの定式化（ベイジアンゲーム）
  - プレーヤー　$i = 1, 2, \ldots, N$
  - i の私的情報（タイプ）　$t_i \in T_i$（ひとまず有限集合とする）
    - $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_N)$
    - $P(\mathbf{t})$　タイプの事前分布（Common Prior）
      - タイプの分布に関するプレーヤー間の共通の理解
  - i の行動　$a_i \in A_i$
    - $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N)$
  - i の戦略　$s_i : T_i \to A_i$（$a_i = s_i(t_i)$）
  - i の実現する利得　$u_i(\mathbf{a}, \mathbf{t})$（タイプに依存）
    - $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_N)$ の下での期待利得

$$\pi_i(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{t}} u_i(\mathbf{s}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) P(\mathbf{t})$$

- 定義　次の条件を満たす戦略の組 $\mathbf{s}^* = (s_1^*, \ldots, s_N^*)$ をベイジアン・ナッシュ均衡と言う。

$$\forall i\, \forall s_i \quad \boldsymbol{\pi}_i(\mathbf{s}^*) \geq \boldsymbol{\pi}_i(s_{-i}^*, s_i)$$

  - 「自分のタイプが分かる前にお互い最適反応」

- $\pi_i(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{t}} u_i(\mathbf{s}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) \Pr(t_{-i}|t_i) \Pr(t_i) = \sum_{t_i} \left[\sum_{t_{-i}} u_i(\mathbf{s}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) \Pr(t_{-i}|t_i) \right] \Pr(t_i)$
  - $[\quad] = u_i(s_{-i}, s_i(t_i)|t_i)$（自分のタイプを知った後の条件付期待利得）

  全てのタイプ t_i が起こる可能性がある（$\forall t_i, \Pr(t_i) > 0$）なら、

- 命題　$\mathbf{s}^*$ がベイジアン・ナッシュ均衡

$$\Longleftrightarrow \quad \forall i\, \forall t_i\, \forall a_i \quad u_i(s_{-i}^*, s_i^*(t_i)|t_i) \geq u_i(s_{-i}^*, a_i|t_i)$$

  - 「自分のタイプが分かった後にお互い最適反応」→使い易い方を使えばよい（こちらの方が応用では使い易い）

オークション

- 中古車一台を売る。
- 買い手　$i = 1, \ldots, N$
- タイプ＝留保価格　v_i（最大いくらまで払うか）
  - 独立に $[0,1]$ 上の一様分布に従う。
- 各人は入札額 $b_i (\geq 0)$ を同時に出す。$\Rightarrow$ 一番高い値を付けた者が、その値段で物件（中古車）を入手。（同点 $\Rightarrow$ 等確率で勝者を決める。)（（最高価格）封印入札）
- 利得

$$u_i = \begin{cases} v_i - b_i & b_i \text{ が勝つ} \\ 0 & \text{負ける} \end{cases}$$

  - 危険中立性→金額そのものが利得になる。

- 均衡
$$b_i = s_i^*(v_i) = \beta v_i \quad (0 < \beta)$$
と予想して確かめる。
  - 他人がこれに従うときのプレーヤー 1 の利得を考える。（対称性より他のプレーヤーも同様）
- 他人の入札額は最高で β（$\because v_i \in [0,1]$）$\Rightarrow \beta$ より高く出すのは（勝つ確率は 1 で変わらないのに払う額が増えて）損
- $b_1 \leq \beta$ が勝つ確率
$$\Pr(b_1 > b_2, \ldots, b_N) = \Pr\left(\frac{b_1}{\beta} > v_2\right) \cdots \Pr\left(\frac{b_1}{\beta} > v_N\right) = \left(\frac{b_1}{\beta}\right)^{N-1}$$
  - $\because$ 独立、一様分布

$\Rightarrow$（$b_i = \beta v_i, i \neq 1$ に対し）$b_1 = \frac{N-1}{N} v_1$ が（$b_1 \leq \beta$ であれば）最適
$\Rightarrow$（対称性より）$b_i = \frac{N-1}{N} v_i, i = 1, \ldots, N$（$\Rightarrow b_i \leq \beta$）はお互い最適

- <u>命題</u>　各人の留保価格が独立に $[0,1]$ 上の一様分布に従う時の封印入札の均衡は

$$b_i = \left(1 - \frac{1}{N}\right) v_i$$

  - v_i を $\frac{1}{\text{人数}}$ だけ割り引くのが最適
  - $N \to \infty$ なら $b_i \to v_i$